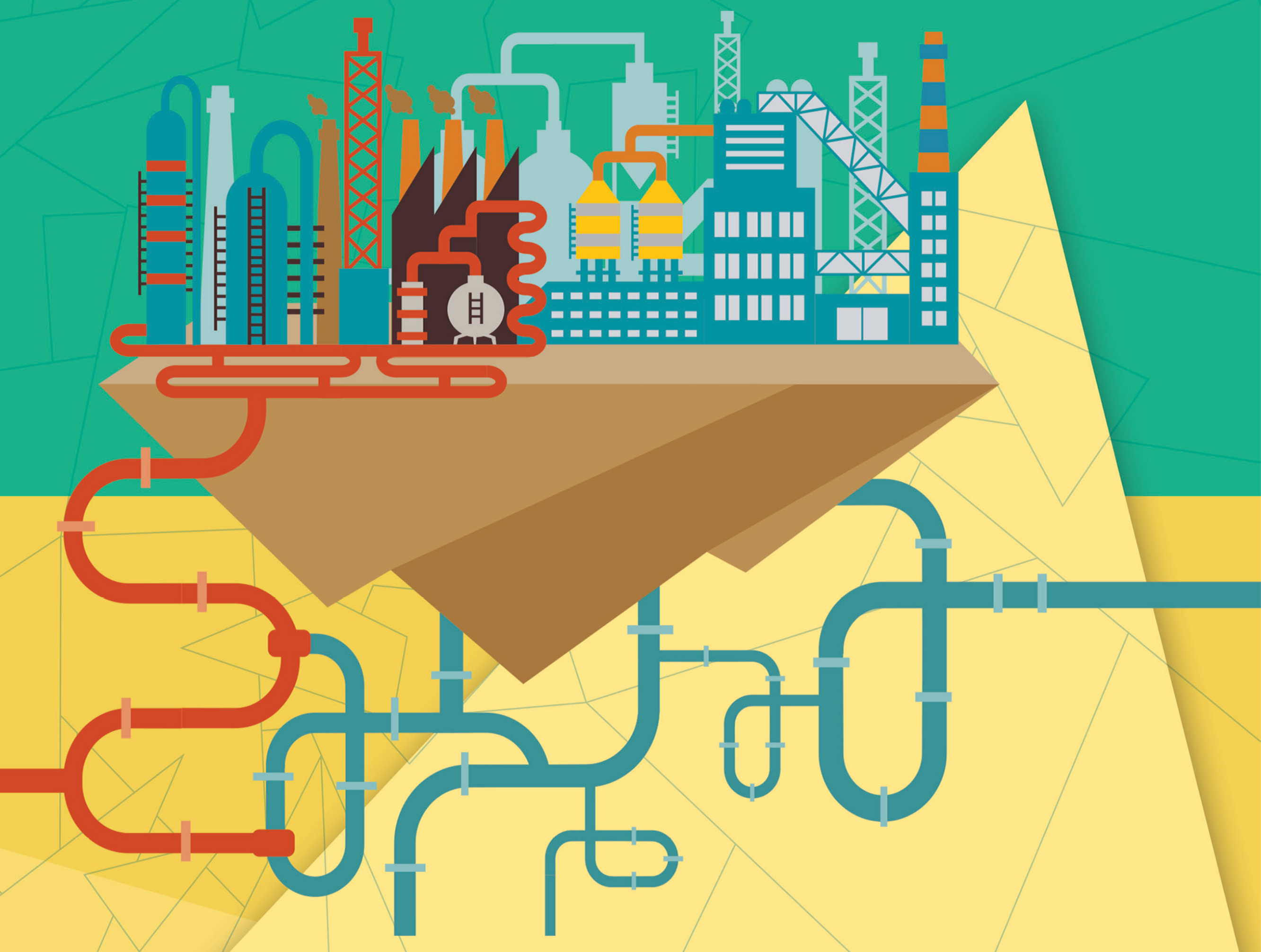
ตำราเรียนวิชา
กลศาสตร์ของวัสดุ II
Mechanics of Materials II



ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.นันทวัฒน์ ขมหวาน
คณะวิศวกรรมศาสตร์ กำแพงแสน
มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ วิทยาเขตกำแพงแสน

ตำราเรียนวิชา กลศาสตร์ของวัสดุ II Mechanics of Materials II

คำนำ

ตำราเรียนวิชากลศาสตร์ของวัสดุ II จัดทำเพื่อใช้ในการเรียนการสอน ซึ่งสอนในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตร์บัณฑิต สาขาวิศวกรรมโยธา กลศาสตร์ของวัสดุเป็นพื้นฐานในการวิเคราะห์ปัญหาที่นำไปสู่การออกแบบโครงสร้างที่สลับซับซ้อน ซึ่งพิจารณาวัสดุในการรับแรงเฉือน แรงดัด วิเคราะห์การโก่งตัว และปัญหาเฉพาะทางมากขึ้น

วิชากลศาสตร์ของวัสดุ II เนื้อหามีทั้งพื้นฐานของความเค้นและความเครียด และหัวข้อที่ซับซ้อนจึงยากต่อการเข้าใจ เพราะต้องใช้ทักษะและจินตนาการในการผสมผสานเชิงทฤษฎีสู่การจำลองโครงสร้างที่ผู้เรียนสาขาวิศวกรรมโยธาต้องประยุกต์ใช้ต่อไป ตำราเล่มนี้จึงเรียบเรียงขึ้นโดยมีวัตถุประสงค์ต้องการให้เนื้อหาที่สามารถอ่านพร้อมแสดงรูป และตัวอย่างการใช้งานจริง เพื่อให้ผู้เรียนทำความเข้าใจได้โดยไม่ยากจนเกินไป เนื้อหาในตำราครอบคลุมตามรายละเอียดวิชา โดยแบ่งประเภทของทิศทางของแรงที่กระทำ ประเภทและลักษณะของโครงสร้าง รวมถึงพฤติกรรมของวัสดุแต่ละชนิด เนื้อหาทั้งหมดเป็นส่วนสำคัญที่ให้ผู้เรียนมีพื้นฐานทางด้านกลศาสตร์ของวัสดุ

ผู้เรียบเรียงหวังว่าตำราเล่มนี้จะเป็นประโยชน์แก่ผู้อ่านและทำให้เข้าใจเกี่ยวกับกลศาสตร์วัสดุ รวมทั้งนำความรู้เพื่อช่วยนำไปใช้ประยุกต์ใช้งานในการออกแบบโครงสร้างที่เกี่ยวข้องได้ต่อไป

นันทวัฒน์ ขมหวาน
ผู้เรียบเรียง

สารบัญ

		หน้า
คำนำ		i
สารบัญ		ii
บทที่ 1	**ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด**	**1**
	1.1 บทนำ	1
	1.2 ทบทวนความเค้นและความเครียด	1
	1.3 ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดในพิกัดคาร์ทีเซียน	14
	1.4 ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการโก่งตัว	19
	1.5 ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น, ความเครียด และการกระจัดในพิกัดโพลา	23
	แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 1	25
บทที่ 2	**แรงเฉือนและจุดศูนย์กลางแรงเฉือน**	26
	2.1 บทนำ	26
	2.2 แรงเฉือนตามแนวขวางบนชิ้นส่วนโครงสร้างที่มีหน้าตัดคงที่	26
	2.3 ความเค้นเฉือนในคานสี่เหลี่ยมผืนผ้า	30
	2.4 แรงเฉือนหน้าตัดของคานประกอบ	36
	2.5 การไหลของแรงเฉือนในหน้าตัดผนังบาง	40
	2.6 จุดศูนย์กลางแรงเฉือน	45
	แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 2	50
บทที่ 3	**โมเมนต์ดัด**	**52**
	3.1 บทนำ	52
	3.2 โมเมนต์ดัดสมมาตร	52
	3.2.1 การเปลี่ยนแปลงรูปร่างของชิ้นส่วนรับแรงดัด	55
	3.2.2 ความเค้นดัด	57
	3.3 โมเมนต์ดัดไม่สมมาตร	67
	3.4 คานโค้ง	78
	แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 3	88

สารบัญ (ต่อ)

		หน้า
บทที่ 4	**คานบนฐานรากยืดหยุ่น**	**90**
	4.1 บทนำ	90
	4.2 ทฤษฎีทั่วไป	90
	4.3 คานรองรับสปริงที่วางห่างเป็นระยะเท่าๆ กัน	103
	4.4 คานยาวอนันต์รับน้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอ	108
	4.5 คานยาวกึ่งอนันต์มีน้ำหนักบรรทุกแบบจุดที่ปลาย	114
	4.6 คานยาวกึ่งอนันต์มีน้ำหนักบรรทุกแบบจุดกระทำใกล้ที่ปลายคาน	117
	4.7 คานสั้น	120
	แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 4	122
บทที่ 5	**แรงบิด**	124
	5.1 บทนำ	124
	5.2 เพลาหน้าตัดที่ไม่ใช่วงกลมตัน	124
	5.3 ท่อผนังบางที่มีหน้าตัดปิด	127
	5.3.1 การไหลของหน่วยแรงเฉือน	128
	5.3.2 หน่วยแรงเฉือนเฉลี่ย	129
	5.3.3 มุมของการบิด	130
	แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 5	137
บทที่ 6	**คานประกอบ**	**139**
	6.1 บทนำ	139
	6.2 คานประกอบ	139
	6.3 คานคอนกรีตเสริมเหล็ก	148
	แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 6	151
บทที่ 7	**การโก่งของเสา**	**155**
	7.1 บทนำ	155
	7.2 น้ำหนักบรรทุกวิกฤต	156
	7.3 เสายาวที่ใช้สมการของออยเลอร์	157

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

7.4 ข้อจำกัดของสมการของออยเลอร์.......... 162
7.5 เสายาวปานกลาง-สูตรจากการทดลอง.......... 167
7.6 เสาที่มีภาระกระทำเยื้องศูนย์.......... 176
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 7.......... 180

บทที่ 8 วิธีพลังงาน.......... **181**
8.1 บทนำ.......... 181
8.2 งานของแรง.......... 181
8.3 พลังงานความเครียดแบบยืดหยุ่นสำหรับแรงกระทำชนิดต่างๆ.......... 186
8.4 การอนุรักษ์พลังงาน.......... 199
8.5 หลักการของงานเสมือน.......... 204
8.6 การประยุกต์ใช้วิธีแรงเสมือนกับโครงถัก.......... 208
8.7 การประยุกต์ใช้วิธีแรงเสมือนกับคาน.......... 215
8.8 ทฤษฎีของคาสทีเกียรโน.......... 225
8.9 การประยุกต์ใช้ทฤษฎีของคาสทีเกียรโนกับโครงถัก.......... 227
8.10 การประยุกต์ใช้ทฤษฎีของคาสทีเกียรโนกับคาน.......... 232
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 8.......... 239

บทที่ 9 ทฤษฎีของการแตกหัก.......... **243**
9.1 บทนำ.......... 243
9.2 ทฤษฎีหน่วยแรงเฉือนที่มีค่ามากที่สุด.......... 244
9.3 ทฤษฎีพลังงานบิดที่มีค่ามากที่สุด.......... 246
9.4 ทฤษฎีหน่วยแรงตั้งฉากปกติที่มีค่ามากที่สุด.......... 249
9.5 จุดวิกฤตของการแตกหักของโมห์.......... 250
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 9.......... 258

ภาคผนวก คุณสมบัติของหน้าตัดเหล็กรูปพรรณ **260**
บรรณานุกรม **273**
ดัชนี **274**

บทที่ 1
ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด

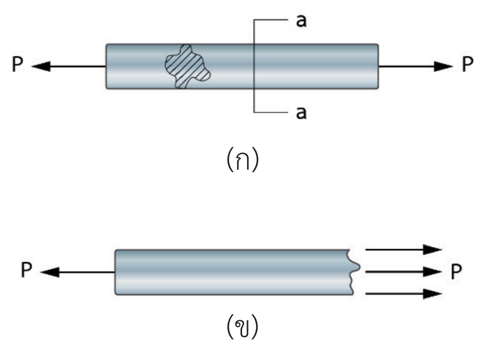
1.1 บทนำ

วิชากลศาสตร์ของวัสดุเป็นวิชาพื้นฐานที่สำคัญในการต่อยอดกับหลายๆ สาขาทางวิศวกรรมศาสตร์ ทั้งในวิศวกรรมโยธา วิศวกรรมไฟฟ้า วิศวกรรมเครื่องกล วิศวกรรมวัสดุ และเป็นส่วนสำคัญในเครื่องมือของ Internet of Things (IoT) ในปัจจุบัน อย่างไรก็ตามตำราเล่มนี้จะเน้นสำหรับวิศวกรรมโยธา บทนี้กล่าวถึงภาพรวมเกี่ยวกับกลศาสตร์ของวัสดุ นิยาม ลักษณะ พฤติกรรมของวัสดุซึ่งแบ่งได้ตามลักษณะต่างๆ เพื่อให้ผู้อ่านเข้าใจได้ง่าย

กลศาสตร์ของวัสดุเป็นสาขาวิชาทางกลศาสตร์ที่ศึกษาในหัวข้อของผลกระทบภายในของความเค้น (stress) และความเครียด (strain) ที่มีแรงภายนอกมากระทำ โดยแรงนี้จะทำให้เกิดความเค้นกับวัสดุขณะเดียวกันกับที่วัสดุเกิดความเครียดและเสียรูป ซึ่งในสถานการณ์นี้เกิดขึ้นกับวัสดุภายใต้ระบบความเค้นสามมิติเสมอ ส่วนใหญ่ความเค้นและความเครียดจะเกิดขึ้นในลักษณะแบบผสมระหว่างความเค้นดึง ความเค้นกด และความเค้นเฉือน ในบทนี้กล่าวถึงการหาความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดในระบบมิติเดียว สองมิติ และสามมิติ เช่น ปัญหาของแผ่นบาง โดยมีสมมุติฐานที่ใช้ในการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น และความเครียดดังนี้คือเมื่อมีแรงหรือกระทำต่อวัสดุ วัสดุจะเสียรูป (deform) น้อยมาก (infinitesimal) เท่านั้น โดยวัสดุคงอยู่ในสภาพยืดหยุ่น (elastic) และวัสดุเป็นเนื้อเดียวกัน (homogeneous) มีคุณสมบัติเหมือนกันทุกทิศทาง (isotropic)

1.2 ทบทวนความเค้นและความเครียด

ความเค้นอย่างง่าย



(ข)

รูปที่ 1-1 สมมุติฐานการพิจารณาความเค้นอย่างง่าย

พิจารณาจากรูป 1-1(ก) แรงดึง (tension) P กระทำต่อแท่งวัตถุมีพื้นที่หน้าตัด ระนาบ a-a เป็น A วัตถุจะมีการยืดออกจนกระทั่งขาดออกจากกันในที่สุด เมื่อพิจารณา ระนาบ a-a ดังรูปที่ 1-1 (ข) แท่งวัตถุอยู่ในสภาวะสมดุลได้เพราะมีแรงภายใน (internal Force) ออกแรงต้านแรงดึง P เอาไว้ โดยกระทำกระจายตลอดระนาบหน้าตัด แรงที่กระทำต่อหน่วยเล็กๆ ในเนื้อวัสดุนี้เรียกว่าหน่วยแรงหรือความเค้น ซึ่งคือปริมาณความเข้มข้นของแรงต่อหน่วยพื้นที่ ได้สมการว่า

$$\sigma = \frac{P}{A} \qquad (1\text{-}1)$$

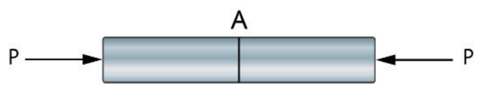
เมื่อ σ = ความเค้น, N/m^2 (Pa)

P = น้ำหนักบรรทุกหรือแรงที่มากระทำ (load or force), N

A = พื้นที่หน้าตัด (cross-section area), m^2

โดยปกติแล้วความเค้นอย่างง่ายสามารถแบ่งออกได้ 3 ชนิด ตามลักษณะของน้ำหนักบรรทุกหรือแรงที่มากระทำ ดังต่อไปนี้

1. ความเค้นอัด (compressive stress) คือค่าของแรงต่อหน่วยพื้นที่ โดยอยู่ภายใต้แรงอัด (compression) ใช้สัญลักษณ์ σ_c



รูปที่ 1-2 แท่งวัตถุภายใต้แรงอัด (compression)

สามารถเขียนสมการของความเค้นอัดได้ดังนี้

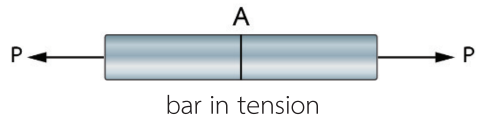
$$\sigma_c = \frac{P}{A} \qquad (1\text{-}2)$$

หรือ σ_c = ความเค้นอัด, N/m^2

P = แรงอัดที่มากระทำ, N

A = พื้นที่หน้าตัด, m^2

2. ความเค้นดึง (tensile stress) คือค่าของแรงต่อหน่วยพื้นที่ โดยอยู่ภายใต้แรงดึง (tension) ใช้สัญลักษณ์ σ_t



รูปที่ 1-3 แท่งวัตถุภายใต้แรงดึง (tension)

เราสามารถเขียนสมการของความเค้นอัดได้ดังนี้

$$\sigma_t = \frac{P}{A} \tag{1-3}$$

หรือ σ_t = ความเค้นอัด, N/m^2

P = แรงอัดที่มากระทำ, N

A = พื้นที่หน้าตัด, m^2

ข้อสังเกต : ทั้งกรณีของความเค้นอัดและความเค้นดึง แนวของแรงกระทำ P จะกระทำในแนวตั้งฉากกับพื้นที่หน้าตัด A ทั้งสองกรณี

การใช้หน่วยของความเค้นมีด้วยกันหลายระบบ สำหรับระบบหน่วย SI ใช้ N/m^2 หรือ Pascal (Pa) ส่วนระบบเมตริกจะใช้ kg/cm^2 หรือ ksc และระบบอังกฤษจะใช้ lb/in^2 หรือ psi แต่ในบางครั้งเราจะพบหน่วยในระบบอังกฤษอีกแบบหนึ่ง คือ kip/in^2 หรือ ksi สำหรับหน่วย kip ดังกล่าวก็คือ kilopound จึงกล่าวได้ว่า 1 kip มีค่าเท่ากับ 1000 lb ยกตัวอย่างเช่น 1 ksi = 1000 psi หรือ 0.5 ksi = 500 psi ตามตำราเล่มนี้ใช้ระบบหน่วย SI เป็นหลัก

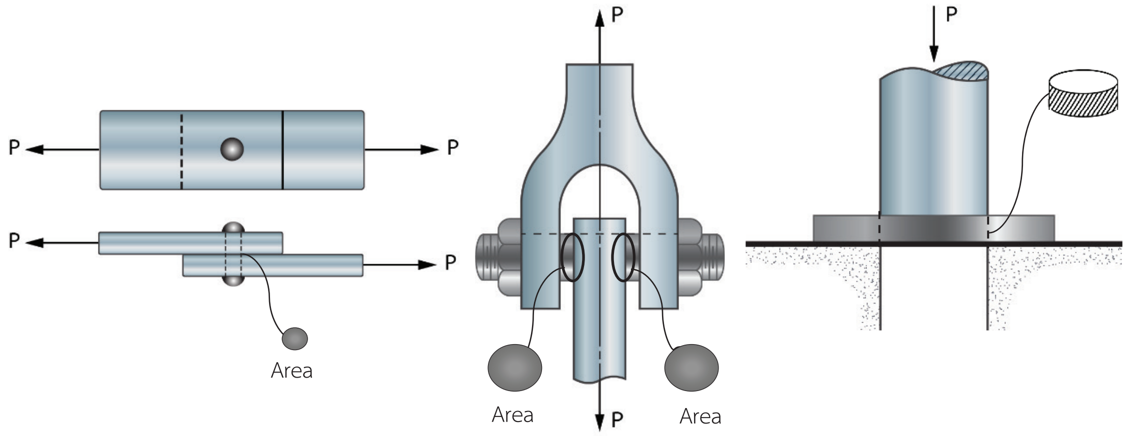
3. ความเค้นเฉือน (shearing stress)

ความเค้นเฉือน คือ ค่าของแรงต่อพื้นที่รับแรงเฉือน (shearing area) ที่ขนานกับแนวแรงกระทำ โดยปกติจะมี 3 ลักษณะ ดังต่อไปนี้

1. ความเค้นเนื่องจากแรงเฉือนเดี่ยว (single shear) ซึ่งลักษณะดังแสดงในรูปที่ 1-4(ก) โดยพื้นที่รับแรงเฉือนจะขนานกับแนวแรงกระทำ

2. ความเค้นเนื่องจากแรงเฉือนคู่ (double shear) ซึ่งมีลักษณะดังแสดงในรูปที่ 1-4(ข) โดยพื้นที่รับแรงเฉือนจะขนานกับแนวแรงกระทำเช่นกัน แต่พื้นที่รับแรงเฉือนจะเพิ่มขึ้น เนื่องจากเป็นพื้นที่คู่กัน

3. ความเค้นเฉือนเจาะทะลุ (punching shear) ซึ่งมีลักษณะดังแสดงในรูปที่ 1-4(ค) โดยพื้นที่รับแรงเฉือนตามแนวที่ทะลุ



(ก) (ข) (ค)

รูปที่ 1-4 ตัวอย่างการเกิดความเค้นเฉือน

การคำนวณหาค่าความเค้นเฉือน มีหลักการเช่นเดียวกับการคำนวณหาความเค้นอย่างง่าย คือ คำนวณจากค่าความเข้มของแรงเฉือนที่กระทำต่อหน่วยพื้นที่ที่ขนานกับแนวแรง หรือเขียนเป็นสมการได้ว่า

$$\tau = \frac{V}{A} \tag{1-4}$$

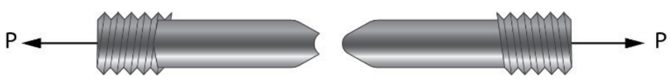
เมื่อ τ = ความเค้นเฉือน (shearing stress), N/m^2

V = แรงเฉือนที่มากระทำ (shear force), N

A = พื้นที่หน้าตัดรับแรงเฉือน (shearing area), m^2

ความเครียดอย่างง่าย

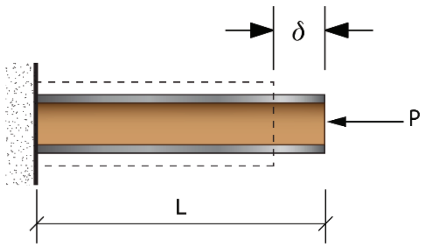
พิจารณาจากรูปที่ 1-5 เมื่อแรงดึง P กระทำวัตถุมีความยาว L ให้ยืดออก วัตถุมีความยาว L เมื่อได้รับแรงดึง P จะเสียรูปและยืดออก จนเกิดการเปลี่ยนแปลงขนาดจนกระทั่งวัตถุวิบัติคือ ขาดออกจากกัน ความยาวที่เปลี่ยนแปลงนั้น(δ) สรุปได้ดังต่อไปนี้



รูปที่ 1-5 สภาวะที่แรงดึงกระทำวัตถุทำให้เปลี่ยนแปลงขนาด (ยืดออก) จนวิบัติ

ความเครียด คือ อัตราส่วนของการเปลี่ยนแปลงขนาดกับขนาดเดิมของวัตถุเมื่อได้รับแรงกระทำ หรือเกิดความเค้น โดยปกติความเครียดจะแบ่งเป็น 2 ชนิด ดังต่อไปนี้

1. ความเครียดอัด (compressive strain) คือ อัตราส่วนของการเปลี่ยนแปลงขนาดของวัตถุกับขนาดเดิมของวัตถุที่ถูกแรงอัดกระทำ ใช้สัญลักษณ์ ε_c



รูปที่ 1-6 การเกิดความเครียดอัด

พิจารณาจากรูปที่ 1-6 แรงอัด P กระทำวัตถุความยาว L จนเกิดการเสียรูป โดยถูกอัดจนยุบตัว (ตามรอยเส้นประ) เหลือความยาว L – δ นั่นคือเกิดการเปลี่ยนแปลงขนาดความยาว δ เราสามารถเขียนเป็นสมการของความเครียดอัดได้ดังนี้

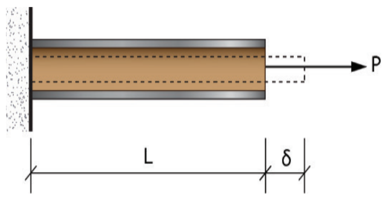
$$\varepsilon_c = \frac{\delta}{L} \quad (1\text{-}5)$$

เมื่อ ε_c = ความเครียดอัด

δ = ขนาดความยาวที่ถูกอัดตัวลง, m

L = ความยาวเดิม, m

2. ความเครียดดึง (tensile strain) คือ เมื่อแรงดึงกระทำวัตถุ อัตราส่วนของการเปลี่ยนแปลงขนาดของวัตถุกับขนาดเดิม ใช้สัญลักษณ์ ε_t



รูปที่ 1-7 การเกิดความเครียดดึง

พิจารณาจากรูปที่ 1-7 แรงดึง P กระทำวัตถุความยาว L จนเกิดการเสียรูป โดยถูกดึงจนยืดออก (ตามรอยเส้นประ) เหลือความยาว L + δ นั่นคือเกิดการเปลี่ยนแปลงขนาดความยาว δ เราสามารถเขียนเป็นสมการของความเครียดดึงได้ดังนี้

$$\varepsilon_t = \frac{\delta}{L} \tag{1-6}$$

เมื่อ ε_t = ความเครียดดึง

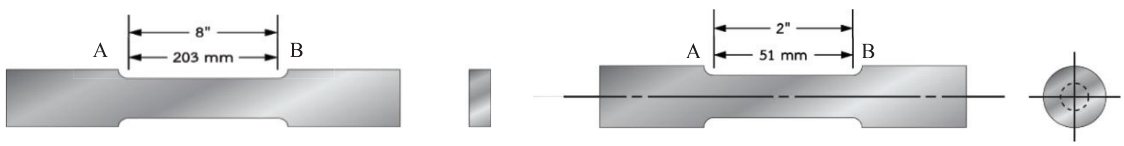
δ = ขนาดความยาวที่ถูกยืดออก, m

L = ความยาวเดิม, m

ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด

ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด แสดงพฤติกรรมของวัสดุเมื่อได้รับแรงกระทำ และใช้ประเมินหาค่าสมมติที่สำคัญทางวิศวกรรม เช่น ความเค้นคราก ความเค้นสูงสุด โมดูลัส ความยืดหยุ่น เป็นต้น

การหาความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียด ปกตินิยมทำโดยการทดสอบแรงดึงของวัสดุ (tensile test) โดยการนำเอาชิ้นวัสดุตัวอย่างมาทำการทดสอบแรงดึงด้วยเครื่องทดสอบ (universal testing machine) โดยเตรียมชิ้นทดสอบตามมาตรฐานการทดสอบวัสดุแห่งอเมริกา (American Society for Testing Materials : ASTM) โดยมี 2 ลักษณะ ดังแสดงในรูปที่ 1-8

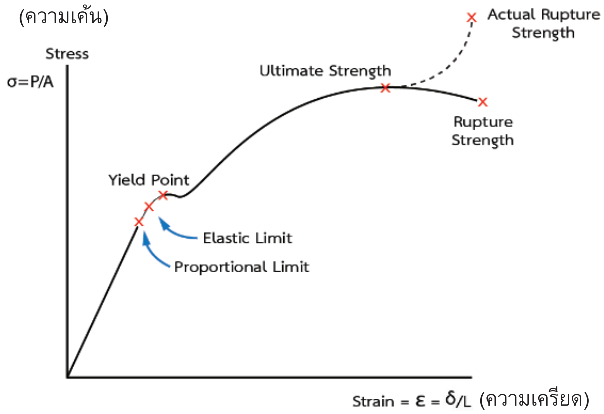


(ก) ชิ้นส่วนทดสอบหน้าตัดสี่เหลี่ยม (ข) ชิ้นส่วนทดสอบหน้าตัดทรงกลม

รูปที่ 1-8 ชิ้นทดสอบแรงดึงตามมาตรฐาน ASTM

ชิ้นทดสอบจะมีปลายทั้งสองข้างใหญ่กว่าส่วนตรงกลางเพื่อป้องกันการวิบัติที่จุดจับยึดที่เป็นเช่นนี้เนื่องจากในทางปฏิบัตินั้น เวลาการติดตั้งชิ้นทดสอบเข้าประกอบในเครื่องทดสอบการจับแน่นส่งผลให้ส่วนปลายจะถูกบีบจากการยึดจับซึ่งจะทำให้เกิดความแปรปรวนของความเค้นสามมิติต่อชิ้นทดสอบ ความยาวเดิมของชิ้นทดสอบที่ใช้ในการคำนวณระยะ AB เรียกว่า gauge length ในการวัดขนาดที่ยืดออกเราจะใช้เครื่องมือวัดที่เรียกว่า extensometer ที่ยึดติดตั้งในช่วงจุด A, B เมื่อทำการดึงชิ้นทดสอบ วัสดุจะเริ่มยืดออก เมื่อให้แรงดึงต่อไปจนวัสดุอยู่ในสถานะพลาสติก (plastic) ซึ่งสังเกตจากส่วนที่ยืดออกของวัสดุ และเมื่อยืดออกกระทั่งมีขนาดเล็กลงจนเป็นคอคอด (necking) จึงถอดเอา

extensometer ออก แล้วใช้วงเวียนเหล็กวัดแทนจนกระทั่งชิ้นทดสอบวิบัติ จากนั้นนำผลที่ได้ไปทำการคำนวณเพื่อหาผลไปเขียนเป็นกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียด มีลักษณะดังแสดงในรูปที่ 1-9



รูปที่ 1-9 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียด

จากกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียด มีจุดสำคัญต่างๆ ดังต่อไปนี้

1. proportional limit เป็นจุดสุดท้ายของกราฟที่เป็นแนวเส้นตรงจากจุด 0 เหตุที่ลากจากจุด 0 มาถึง proportional limit เป็นเส้นตรงนี้ก็เนื่องจากแรงเป็นปฏิภาคโดยตรงกับส่วนที่ยืดออก หรือกล่าวได้ว่า ความเค้นก็เป็นปฏิภาคโดยตรงกับความเครียด

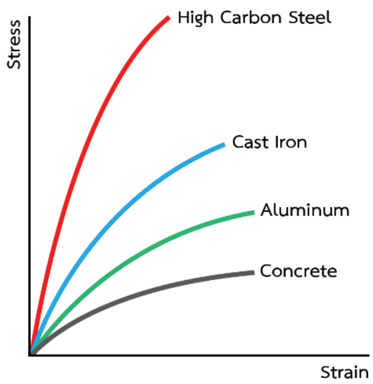
2. elastic limit เป็นจุดสุดท้ายของช่วง elastic กล่าวคือ เป็นจุดสุดท้ายที่ความยาวของวัสดุจะหดตัวกลับมายาวเท่าเดิมถ้าปล่อยแรงกลับ กล่าวอีกนัยหนึ่งคือ จากจุด 0 มาถึง elastic limit วัสดุจะอยู่ในสถานะยืดหยุ่น (elastic)

3. yield point เป็นจุดที่วัสดุยืดตัวออกเองโดยไม่ต้องเพิ่มแรงดึง ถือเป็นจุดเริ่มต้นสถานะพลาสติก คือวัสดุเกิดการเสียรูปอย่างถาวรเมื่อปล่อยแรงกลับ วัสดุจะไม่หดตัวกลับมายาวเท่าเดิมอีกต่อไป ความเค้นที่เกิดขึ้น ณ จุดนี้เรียกว่า ความเค้นคราก (yield stress) ใช้สัญลักษณ์ σ_y อย่างไรก็ตาม จุด yield point หรือจุดครากนี้จะเกิดเฉพาะในวัสดุจำพวกเหล็กกล้าละมุน (mild steel) เท่านั้น

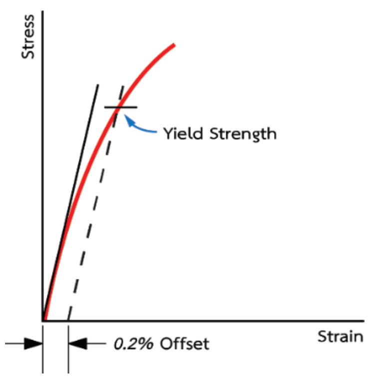
4. ultimate strength เป็นจุดที่มีค่าความเค้นสูงสุด และความเค้นดังกล่าวเป็นแบบความเค้นดึง เมื่อพ้นจากจุดนี้ไปค่าความเค้นจะลดลง และการยืดตัวของวัสดุจะเกิดขึ้นอย่างรวดเร็วมาก ความเค้นสูงสุดนี้ใช้สัญลักษณ์ σ_u

5. rupture point หรือ breaking point เป็นจุดที่วัสดุวิบัติ คือขาดออกจากกัน

ดังที่กล่าวแล้วว่า ความเค้นครากซึ่งเกิดจากจุดคราก จะเห็นได้ชัดเจนเฉพาะในวัสดุจำพวกเหล็กกล้าละมุน (mild steel) เท่านั้น ส่วนวัสดุอื่นๆ จะไม่ปรากฏจุดครากอย่างชัดเจน ดังแสดงในรูป 1-10 ซึ่งมักจะพบค่าความเค้นดึงสูงสุด เมื่อพ้นสถานะยืดหยุ่น ดังนั้นการหาค่าความครากของวัสดุที่ไม่ใช่เหล็กกล้าละมุน สำหรับใช้เปรียบเทียบ อาจทำได้โดยวิธีการออฟเซตค่า (offset method) ที่เหมาะสม ตัวอย่างเช่น จะใช้ค่า 0.2% เราจะลากเส้นจาก 0.2% ให้ขนานกับแนวจุด 0 ถึง proportional limit ตัดกับเส้นกราฟ ณ จุดใด จุดนั้นคือค่ากำลังความคราก (yield strength) หรือเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า 0.2 percentage offset stress ดังแสดงในรูปที่ 1-11

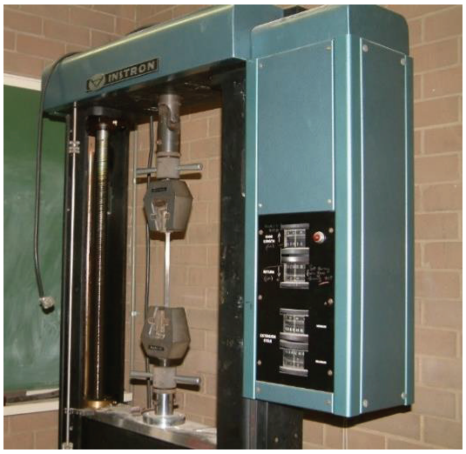


รูปที่ 1-10 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียดของวัสดุต่างๆ



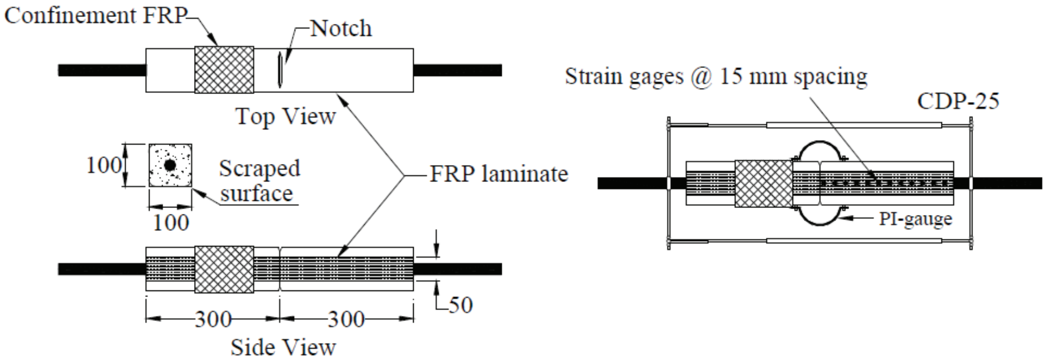
รูปที่ 1-11 การหาค่าความเค้นครากด้วยวิธี percentage offset stress ที่ 0.2% offset

ในปัจจุบันมีวัสดุใหม่ที่นำมาใช้งานมากขึ้น เช่น วัสดุคาร์บอนไฟเบอร์ (CFRP : Carbon Fiber Reinforced Polymer) ซึ่งเป็นวัสดุที่รับกำลังดึงสูงมากแต่มีความเหนียวต่ำ การทดสอบ กลสมบัติของ CFRP ที่ใช้หลักการตามมาตรฐานการทดสอบ คาร์บอนไฟเบอร์เป็นวัสดุที่มีอัตราส่วนของกำลังต่อน้ำหนักสูง มีความต้านทานการผุกร่อนสูง น้ำหนักเบา อย่างไรก็ตามมีความเหนียวที่ต่ำ (low ductility) อาจจะลดทอนความเหนียวโดยรวมขององค์อาคารภายหลังการเสริมกำลังได้ผลการทดลองแสดงว่ากำลังรับแรงดึงสูงสุดมีค่า 4200 MPa และค่าโมดูลัสความยืดหยุ่น 261 GPa [3]

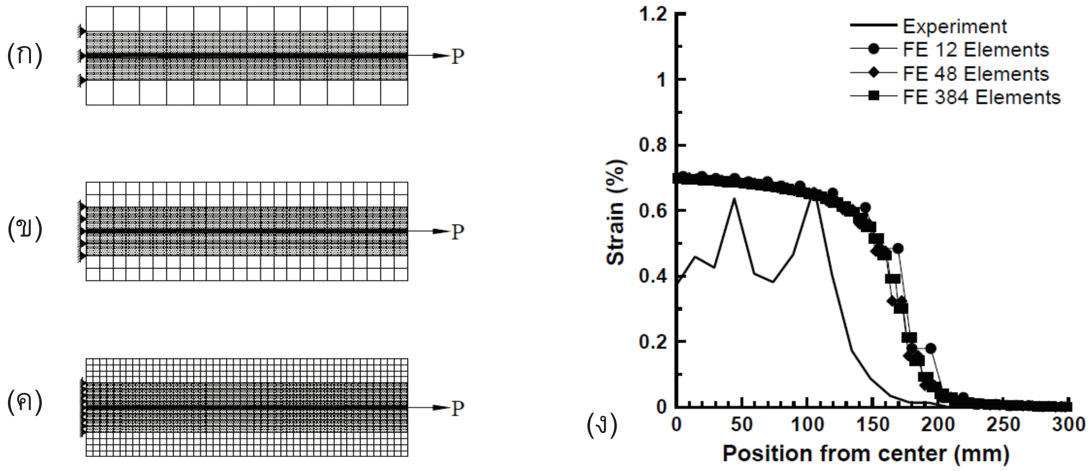


รูปที่ 1-12 การทดสอบความเค้นและความเครียดดึงของ CFRP [3]

ตัวอย่างหนึ่งของการประยุกต์ใช้ในปัจจุบัน ได้แก่ การทดสอบหาความเครียดของวัสดุ CFRP วัสดุนี้นิยมใช้ในงานซ่อมและเสริมกำลังโครงสร้าง เพื่อรับแรงดึง การทดสอบความเครียดที่เกิดขึ้นกับแผ่น CFRP ที่ติดตั้งบนพื้นผิวคอนกรีตทำให้ประเมินความสามารถในการรับแรง และการส่งถ่ายแรงระหว่างวัสดุทั้งสองชนิด นำไปสู่การออกแบบที่ถูกต้องแม่นยำและสามารถประเมินพฤติกรรมของโครงสร้างได้ ดังแสดงการติดตั้งชิ้นตัวอย่างอุปกรณ์วัด ดังรูป 1-13 ซึ่งนอกจากจะหาค่าที่เกิดขึ้นจากการทดสอบในห้องปฏิบัติการแล้วยังมีการนำเทคนิคใหม่ๆ เช่น ไฟไนต์อิลิเมนต์มาวิเคราะห์ได้อีก ดังรูป 1-14 โดยตัวอย่างการทดสอบเป็นแท่งคอนกรีตเสริมเหล็กไว้กึ่งกลางหน้าตัด และทำให้คอนกรีตแยกจากกันที่ตำแหน่งตรงกลางของความยาว หลังจากนั้นติดตั้งแผ่น CFRP ยึดผิวคอนกรีตทั้งสองด้าน ดังนั้น CFRP จะเป็นตัวยึดแท่งคอนกรีตทั้งด้านซ้ายและขวาไว้ด้วยกัน แรงดึงในการทดสอบจะกระทำที่เหล็กทั้งสองด้าน อุปกรณ์วัดจะส่งข้อมูลค่าความเครียดของเหล็ก, ความเครียดของ CFRP และแรงกระทำ เมื่อนำไปวิเคราะห์เปรียบเทียบกับทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ในการประเมินค่า ด้วยวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์ โดยแบ่งเป็นชิ้นส่วนในการวิเคราะห์ มีขนาดต่างกัน 3 แบบ ตั้งแต่ขนาดใหญ่ไปจนเล็ก ดังรูป 1-14 (ก, ข, ค) ซึ่งผลการประเมินด้วยวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์ได้ค่าเป็นที่น่าพอใจตามรูป 1-14 (ง) และมีความเสถียรไม่ขึ้นอยู่กับการแบ่งขนาดของชิ้นส่วนในการวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์ [4]



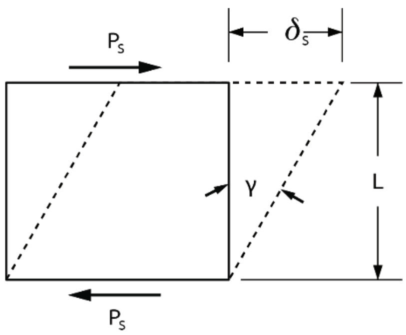
รูปที่ 1-13 การเกิดความเครียดดึงของคอนกรีตและ CFRP [4]



รูปที่ 1-14 การวิเคราะห์ความเครียดด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ [4]

ความเครียดเฉือน

ความเครียดเฉือน คืออัตราส่วนของการเปลี่ยนแปลงมุมของแรงเฉือน หรือ γ ซึ่งเกิดจากการกระทำของแรงเฉือน P_s ซึ่งกระทำต่อบล็อกที่มีความสูง L



รูปที่ 1-15 การเกิดความเครียดเฉือน

พิจารณาจากรูปที่ 1-15 จากนิยามของความเครียด คืออัตราส่วนของการเปลี่ยนแปลงความยาว δ โดยแรงเฉือน P_s ต่อความสูงเดิม L ซึ่งตั้งฉากกับทิศทางแรงเฉือน ทำให้ด้านยาว L ของวัตถุเอียงทำมุม γ ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการได้ว่า

$$\text{ความเครียดเฉือน} = \frac{\delta_s}{L} = \tan\gamma$$

แต่เนื่องจากมุม γ นั้น ในความเป็นจริงแล้วมีค่าน้อยมาก จนกล่าวได้ว่า $\gamma = \tan\gamma$ ดังนั้น

$$\gamma = \frac{\delta_s}{L} \qquad (1\text{-}7)$$

เมื่อ γ = ความเครียดเฉือน

δ_s = ความยาวที่เปลี่ยนไปจากแนวเดิม, m

L = ความยาวของด้านตั้งฉากกับแรงเฉือน, m

กฎของฮุกและโมดูลัสของยัง

ในปี ค.ศ. 1678 (พ.ศ. 2221) โรเบิร์ต ฮุก (Robert Hooke) ได้ทำการทดลองและตั้งกฎจากผลของการทดลอง ประกอบกับกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียดมีสาระสำคัญว่า “ในขอบเขตของสถานะยืดหยุ่น (elastic) แรง $P \alpha \Delta L$ จะเป็นปฏิภาคโดยตรงกับส่วนที่ยืดออก” เมื่อเราพิจารณาจากรูปที่ 1-9 จะพบว่าเส้นลาดเอียงของกราฟ สามารถหาได้จากอัตราส่วนระหว่างความเค้นกับความเครียดจริง ดังสมการที่ 1-8 และเรียกกฎนี้ว่า “กฎของฮุก” (Hooke’s Law)

ความลาดเอียง = ความเค้น / ความเครียด

นั่นคือ
$$\text{Constant} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \qquad (1\text{-}8)$$

เมื่อ Constant = ค่าคงที่, N/m^2

σ = ความเค้น, N/m^2

ε = ความเครียด

ต่อมาในปี ค.ศ. 1807 (พ.ศ. 2350) โธมัส ยัง (Thomas Young) ได้ตั้งข้อสังเกตและสร้างทฤษฎีโต้แย้งกับกฎของฮุก กล่าวคือ ที่จริงหน่วยแรงจะเป็นปฏิภาคโดยตรงกับอัตราส่วนที่ยืดออกจะสิ้นสุดที่ proportional limit ไม่ใช่ elastic limit และตั้งกฎข้อใหม่เรียกว่า โมดูลัสของยัง (Young's Modulus) และรู้จักกันอย่างแพร่หลายในชื่อ โมดูลัสความยืดหยุ่น (modulus of elastic) ใช้สัญลักษณ์ E และเขียนเป็นสมการได้ว่า

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \tag{1-9}$$

เมื่อ E = โมดูลัสความยืดหยุ่น, N/m^2

σ = ความเค้น, N/m^2

ε = ความเครียด

จากสมการที่ 1-9 เมื่อเราพิจารณาค่าตามนิยามของความเค้นและความเครียดแทนในสมการที่ 1-9 จะได้สมการใหม่ ดังต่อไปนี้

$$E = \frac{PL}{A\delta}$$

หรือกล่าวได้ว่า

$$\delta = \frac{PL}{AE} \tag{1-10}$$

เมื่อ δ = ขนาดที่เปลี่ยนแปลง, m

P = แรงที่มากระทำ, N

L = ความยาวเดิม, m

A = พื้นที่หน้าตัดรับแรง, m^2

E = โมดูลัสความยืดหยุ่น, N/m^2

จากสมการที่ 1-9 และ 1-10 จะใช้กับกรณีที่เป็นความเค้นอย่างง่าย และความเครียดอย่างง่าย หรือใช้เฉพาะกับกรณีเป็นแรงอัดและแรงดึงเท่านั้น ในส่วนของความเค้นเฉือนและความเครียดเฉือน จะมีค่าคงที่ที่เรียกว่า โมดูลัสความแข็ง (modulus's rigidity) ใช้สัญลักษณ์ G และเขียนเป็นสมการได้ว่า

$$G = \frac{\tau}{\gamma} \qquad (1\text{-}11)$$

เมื่อ G = โมดูลัสความแข็ง, N/m^2

τ = ความเค้นเฉือน, N/m^2

γ = ความเครียดเฉือน

จากสมการที่ 1-11 เมื่อเราพิจารณาตามนิยามของความเค้นเฉือนและความเครียดเฉือนแทนในสมการที่ 1-11 จะได้สมการใหม่ดังต่อไปนี้

$$G = \frac{VL}{A\delta_s}$$

หรือกล่าวได้ว่า

$$\delta_s = \frac{VL}{AG} \qquad (1\text{-}12)$$

เมื่อ δ_s = ขนาดที่เปลี่ยนแปลงเนื่องจากแรงเฉือน,m

V = แรงเฉือนที่กระทำ, N

L = ความยาวเดิม, m

A = พื้นที่หน้าตัดรับแรงเฉือน, m^2

G = โมดูลัสความแข็ง, N/m^2

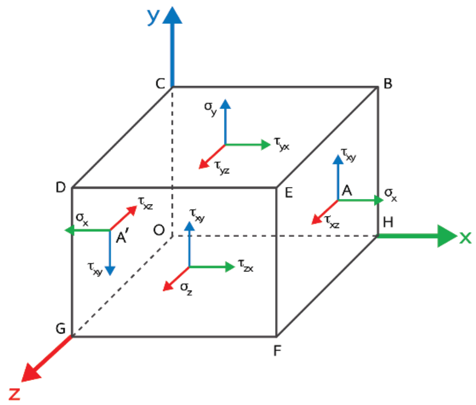
กลสมบัติของวัสดุบางชนิดที่นิยมใช้ทางวิศวกรรม แสดงในตารางที่ 1.1

ตารางที่ 1.1 กลสมบัติของวัสดุประเภทต่างๆ

Materials	Ultimate Tensile Stress (MN/m^2)	Modulus of Elasticity (GN/m^2)	Modulus of Rigidity (GN/m^2)
Brass	300-400	83	37
Cast Iron	120-160	110	48
Copper	300-350	96	39
Steel	450-600	205	90
Wrought Iron	300-400	190	83
Wood	-	9.6	0.55

1.3 ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดในพิกัดคาร์ทีเซียน

พิจารณาสถานะของความเค้นในเนื้อวัสดุที่เป็นกล่องมีขนาดเล็กมากๆ คือ Δx , Δy และ Δz เช่นในรูป 1-16 โดยความเค้นในด้านหลังจะมีขนาดเท่ากับความเค้นในด้านหน้า แต่จะมีทิศทางตรงกันข้าม



รูปที่ 1-16 ความเค้น 3 มิติ

σ_x , σ_y , และ σ_z คือ ความเค้นในทิศทาง x, y และ z ที่ระนาบที่ตั้งฉากกับแกน x, y และ z ตามลำดับ ส่วนความเค้นเฉือน เช่น τ_{xy} และ τ_{xz} ที่จุด A คือความเค้นเฉือนที่ระนาบที่ตั้งฉากกับแกน x และมีทิศทางชี้ไปทางแกน y และแกน z ตามลำดับ หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือ τ คือความเค้นเฉือน ตัวห้อย ตัวแรก x คือระนาบที่ความเค้นเฉือนกระทำ ส่วน ตัวห้อย ตัวที่ 2 y หรือ z นั้นคือทิศทางของความเค้นเฉือนนั้นๆ

ความเค้นทั้งหมดที่แสดงในรูปที่ 1-16 จะมีทิศทางเป็นบวก คือ σ_x , σ_y , และ σ_z เป็นบวก เพราะเป็นความเค้นดึง ส่วนทิศทางของความเค้นเฉือนกำหนดได้ดังนี้ จากรูปที่ 1-16 ถ้าให้ระนาบที่หันหน้าไปทางแกนบวกเป็นระนาบบวก และระนาบที่หันหน้าไปทางแกนลบจะเป็นระนาบลบ สำหรับความเค้นเฉือน τ_{xy} และ τ_{xz} นั้นกระทำบนระนาบบวก (จุด A) และกระทำให้ทิศทางเดียวกับทิศทางของแกน y และแกน x ที่เป็นบวก ดังนั้นความเค้นเฉือนทั้งสองจึงเป็นบวก

ส่วนความเค้นเฉือนที่กระทำบนระนาบลบ (จุด A′) τ_{xy} และ τ_{xz} เป็นบวกเช่นกัน เพราะความเค้นเฉือนทั้งสองกระทำที่ระนาบลบ และมีทิศทางตรงกันข้ามกับทิศทางของแกน y และแกน z (-y และ -z) ส่วนความเค้นเฉือนอื่นๆ ก็สามารถจะกำหนดได้โดยวิธีเดียวกัน

ความเค้นในรูปที่ 1-16 จะประกอบด้วย 9 ความเค้นย่อยในทิศทางและระนาบต่างๆ σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yx} , τ_{xz} , τ_{zx} , τ_{yz} และ τ_{zy} ซึ่งสามารถเขียนในรูปของความเค้นเทนเซอร์ (stress tensor) ที่ชี้ให้ทราบถึงขนาดและทิศทางของความเค้นเหล่านี้ได้คือ

$$|\sigma| = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} \tag{1-13}$$

$|\sigma|$ คือความเค้นเทนเซอร์ ในสภาพสมดุล ถ้าพิจารณาโมเมนต์รอบแกน x

$$\tau_{yz}(\Delta x\Delta z)\Delta y = \tau_{zy}(\Delta x\Delta y)\Delta z$$

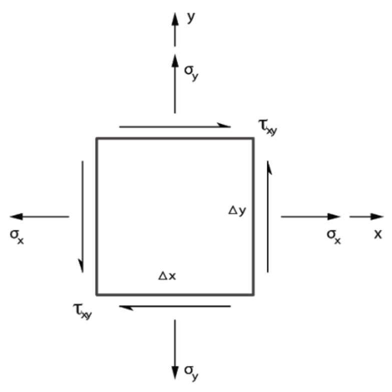
หารด้วย Δx , Δy และ Δz ทั้งสองข้าง ดังนั้น $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ ในทำนองเดียวกัน ถ้าพิจารณาโมเมนต์รอบแกน y และแกน x จะได้ $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ และ $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ตามลำดับ ดังนั้นความเค้นที่จุดหนึ่งจุดใดในวัสดุประกอบด้วยความเค้น 6 ตัว คือ

$$|\sigma| = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} \tag{1-14}$$

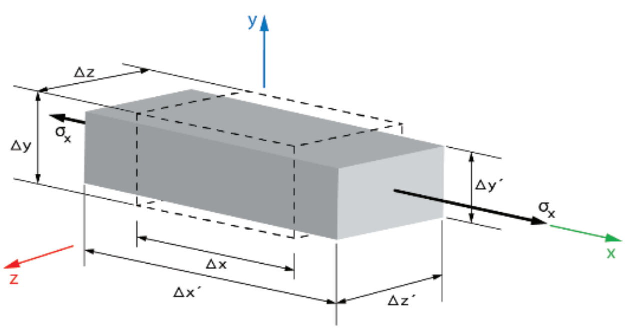
ในทางปฏิบัติเมื่อความเค้นในทิศทางหนึ่งจะเท่ากับศูนย์ เช่น ในทิศทาง z ความเค้น $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0$ ในกรณีนี้จะเรียกสถานะความเค้นว่า ความเค้นสองแกน (biaxial stress) หรือความเค้นระนาบ (plane stress) ดังนั้น ส่วนประกอบของความเค้นในรูปของความเค้นเทนเซอร์ จะประกอบด้วย 3 ความเค้นย่อยคือ

$$\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} \tag{1-15}$$

เช่น แสดงในรูปที่ 1-17(ก) ซึ่งเป็นรูปสองมิติ แต่ความจริง ชิ้นส่วนยังเป็นสามมิติ คือมีความลึกเท่ากับ Δz และจากรูปที่ 1-17(ข) ถ้า σ_x กระทำบนชิ้นส่วน Δx , Δy และ Δz ในทิศทาง x



(ก)



(ข)

รูปที่ 1-17 ความเค้น 2 มิติและชิ้นส่วนที่มีความเค้นในทิศทาง x กระทำ

และทำให้มิติของชิ้นส่วน Δx , Δy และ Δz เปลี่ยนไปคือ

$$\Delta x' = \Delta x+\varepsilon_x \Delta x\,,\ \Delta y' = \Delta y+\varepsilon_y \Delta y\,,\ \Delta z' = \Delta z+\varepsilon_z \Delta z \qquad (1\text{-}16)$$

ซึ่ง $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ คือ ความเครียดแนวตั้งฉาก (normal strain) ความเครียดทั้งสาม จะเป็นบวกถ้าเป็นการขยายตัว และ จะเป็นลบถ้าเป็นการหดตัว จากกฎของฮุค ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและความเค้น คือ $\varepsilon = \frac{\sigma_x}{E}$, E = โมดูลัสยืดหยุ่น จากรูปจะเห็นว่ามิติของชิ้นส่วนในทิศทาง x จะเพิ่มขึ้น ส่วนในทิศทาง y และ z จะลดลง ถ้าวัสดุอยู่ในสภาพยืดหยุ่นและเป็นเนื้อเดียวกันและเหมือนกันทุกทิศทางความเครียดในทิศทาง y และ z คือ

$$\varepsilon_y = -\mu\varepsilon_x = -\frac{\mu}{E}\sigma_x$$

และ

$$\varepsilon_z = -\mu\varepsilon_x = -\frac{\mu}{E}\sigma_x$$

μ คืออัตราส่วนของ Poisson

ในทำนองเดียวกันความเครียดที่เกิดจาก σ_y คือ

$$\varepsilon_x = \varepsilon_z = -\mu\frac{\sigma_y}{E},\ \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E}$$

ความเครียดเกิดจาก σ_z คือ

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\mu\frac{\sigma_z}{E},\ \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}$$

ดังนั้น ความเครียดที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนในขณะที่ชิ้นส่วนอยู่ในสภาวะของ σ_z , σ_y , และ σ_z พร้อมๆ กัน ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดคือ

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)\right]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)\right] \qquad (1\text{-}17)$$

ถ้าทราบค่าความเครียด ก็สามารถหาความเค้นได้โดยอาศัยสมการ (1.5) คือ

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left[(1-\mu)\varepsilon_x + \mu(\varepsilon_y + \varepsilon_z)\right]$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left[(1-\mu)\varepsilon_y + \mu(\varepsilon_z + \varepsilon_x)\right]$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left[(1-\mu)\varepsilon_z + \mu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)\right] \qquad (1\text{-}18)$$

ในกรณีของความเค้นตามแกนคู่หรือความเค้นระนาบ ถ้า $\sigma_z = 0$ สมการของความเครียดและความเค้น คือ

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu\sigma_y\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu\sigma_x\right]$$

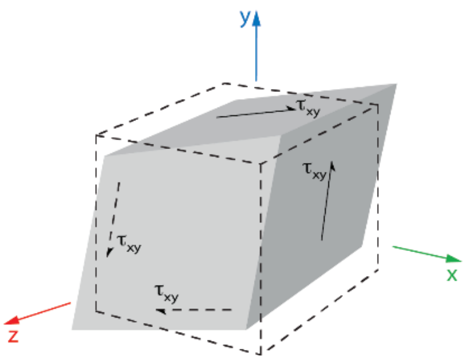
$$\varepsilon_z = -\frac{\mu}{E}\left[\sigma_x + \sigma_y\right] \qquad (1\text{-}19)$$

และจากสมการ (1-19) ความเค้น σ_x และ σ_y ในเทอมของ ε_x และ ε_y คือ

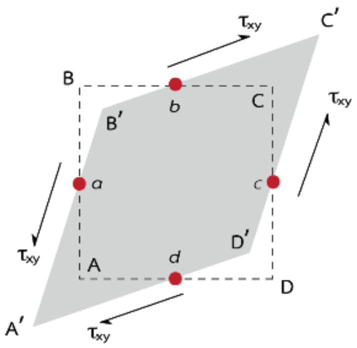
$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) \qquad (1\text{-}19)$$

การเปลี่ยนแปลงรูปร่างของชิ้นส่วนอันเนื่องจากความเค้นเฉือน τ_{xy} นั้นหาได้จากรูปที่ 1-18 คือ ถ้าให้ γ เท่ากับความเครียดเฉือน ดังนั้น γ_{xy} อันเนื่องจาก τ_{xy} คือ ความเครียดเฉือนจะเป็นบวกถ้าความเครียดนั้นทำให้มุมเดิมของชิ้นส่วน (มุม A รูปที่ 1-18(ข)) เล็กลงเป็นมุม A และความเครียดเฉือนจะเป็นลบถ้ามุมที่เปลี่ยนแปลงนั้นมีขนาดใหญ่ขึ้น



(ก)



(ข)

รูปที่ 1-18 ชิ้นส่วนที่มีความเค้นในทิศทาง x กระทำ

γ_{xy} = การเปลี่ยนแปลงของมุม BAD = มุม BAD – มุม B’ A’ D’ ถ้าวัสดุอยู่ในสภาพยืดหยุ่นตัวเป็นเนื้อเดียวตลอด และมีคุณสมบัติเหมือนกันทุกทิศทาง

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \tag{1-20}$$

ซึ่ง G = โมดูลัสเฉือน ในทำนองเดียวกันความเครียดเฉือนเนื่องจาก τ_{yx} และ τ_{zx} คือ

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \tag{1-21}$$

และ

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} \tag{1-22}$$

ส่วนความสัมพันธ์ของ G, E และ μ คือ

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \tag{1-23}$$

ดังนั้นสมการ (1-21) (1-22) และ (1-23) เขียนใหม่ได้ดังนี้

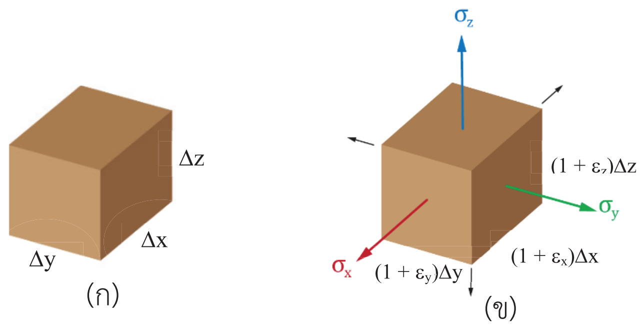
$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{yz}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{zx} \tag{1-24}$$

จากรูปที่ 1-18(ข) จะเห็นว่าในขณะที่ τ_{xy} กระทำระยะทางระหว่าง ac และ bd ไม่เปลี่ยนแปลงทั้งนี้เนื่องจากไม่มีความเค้นแนวฉากกระทำในทิศทาง x และ y นั่นเอง

ขณะที่วัสดุถูกความเค้นตั้งฉากกระทำ ปริมาตรของวัสดุจะเปลี่ยนแปลง เพื่อที่จะหาการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรดังกล่าว เราจะพิจารณาปริมาตรของชิ้นส่วน Δx , Δy และ Δz รูปที่ 1-19(ก) มีความเค้น σ_x , σ_y และ σ_z กระทำขณะที่ถูกชิ้นส่วนความเค้นกระทำ แต่ละด้านของชิ้นส่วนจะเปลี่ยนแปลงไปจากเดิม คือ $(1+\varepsilon_x)\Delta x$, $(1+\varepsilon_y)\Delta y$, $(1+\varepsilon_z)\Delta z$ ตามลำดับ เช่น รูปที่ 1-19 ดังนั้นปริมาตรของชิ้นส่วนที่เปลี่ยนไปคือ



รูปที่ 1-19 ชิ้นส่วนที่มีความเค้นในทิศทาง x กระทำ

$$\delta_v = (1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z)\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z - \Delta x\,\Delta y\,\Delta z$$

$$= (\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z+\varepsilon_x\varepsilon_y+\varepsilon_x\varepsilon_z+\varepsilon_y\varepsilon_z+\varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z)\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$$

เนื่องจากความเครียด ε_x, ε_y, ε_z มีค่าน้อย ดังนั้นผลคูณของความเครียดจะยิ่งมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับความเครียด ε_x, ε_y, ε_z ดังนั้นปริมาตรของชิ้นส่วนที่เปลี่ยนไป δ_v คือ

$$\delta_v = (\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$$

ถ้าให้ e = การเปลี่ยนไปของปริมาตรต่อปริมาตรเดิม ซึ่งเรียกว่า “volumetric strain” หรือ “dilation e “ นั่นคือ

$$e = \delta v/v = \varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z \qquad (1\text{-}25)$$

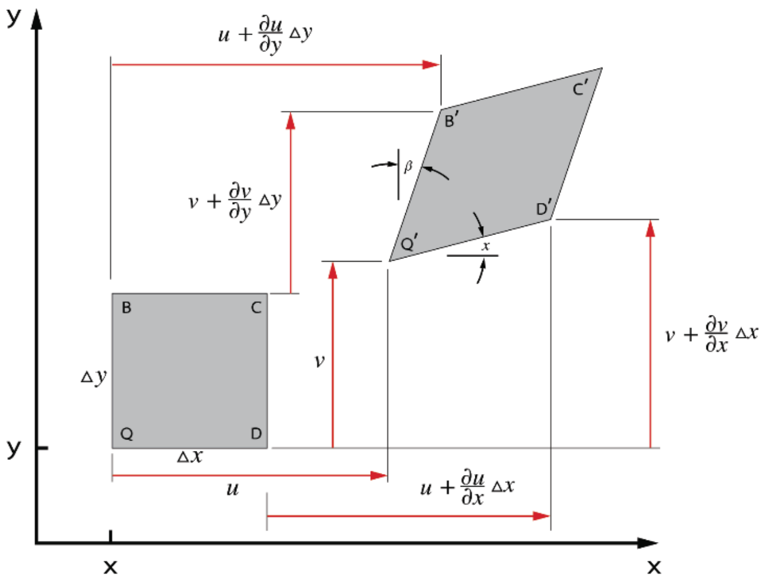
โดยความเครียดเฉือนจะไม่ทำให้ปริมาตรของชิ้นส่วนเปลี่ยนไป แต่ความเครียดเฉือนจะทำให้รูปร่างเปลี่ยนจากสี่เหลี่ยมเดิม

จากความสัมพันธ์ของความเค้นและความเครียดในสมการ (1-17 และ 1-18) เราสามารถจะหาค่า e ได้ในเทอมของความเค้น σ_x, σ_y และ σ_z คือ

$$e = \frac{1-2\mu}{E}\left(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z\right) \qquad (1\text{-}26)$$

1.4 ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการโก่งตัว

ในขณะที่วัตถุได้รับความเค้นก็จะทำให้มีความเครียดและการโก่งหรือการเบนเกิดขึ้นด้วย โดยทั่วไปเราถือว่า การโก่งที่เกิดขึ้นมีค่าน้อย ถ้าให้ชิ้นส่วน QBCD อยู่บนพิกัด x,y และ z ดังรูป 1-19 ก่อนที่ชิ้นส่วนจะถูกแรงกระทำ ชิ้นส่วนจะมีรูปเป็นสี่เหลี่ยมมุมฉาก เนื่องจาก ชิ้นส่วนอยู่ในช่วงยืดหยุ่น ดังนั้นหลังจากชิ้นส่วนถูกแรงกระทำ ชิ้นส่วนจะเปลี่ยนรูปร่างเป็น ชิ้นส่วน Q’B’C’D’ และให้ u และ v เป็นการโก่งของจุด Q ที่เกิดขึ้นในทิศทาง x และ y ดังแสดงในรูป 1-20



รูปที่ 1-20 ชิ้นส่วนภายใต้สภาวะความเครียด

การโก่งของจุด Q ใดๆ ในวัตถุอาจจะแทนด้วยฟังก์ชั่นต่อเนื่องของ x และ y คือ

$$u = u(x,y) \qquad \text{และ} \qquad v = v(x,y)$$

ฟังก์ชั่นเหล่านี้สามารถกระจายเทียบกับจุดใดจุดหนึ่งในเทอมของ อนุกรมของเทเลอร์ เนื่องจาก QD อยู่ในแนวราบ $\left(\Delta_y = 0\right)$ ดังนั้นการโก่งที่จุด D ในทิศทาง x เมื่อเทียบกับจุด Q ในเทอมของอนุกรมของเทเลอร์คือ

$$u_D = u + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{1}{2!}\frac{\partial u^2}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

ในทำนองเดียวกันกับการโก่งที่จุด D เทียบกับจุด Q ในทิศทาง y คือ

$$v_D = v + \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{1}{2!}\frac{\partial v^2}{\partial x^2}(\Delta x)^2$$

ถ้า Δx มีค่าน้อย เทอม $\left(\Delta_x\right)^2$ หรือ เทอมที่มีกำลังสูงกว่านี้ อาจจะตัดทิ้งได้

ดังนั้น
$$u_D = u + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x, \quad v_D = v + \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x$$

ในทำนองเดียวกันจากอนุกรมของเทเลอร์ การโก่งที่จุด B เทียบกับ Q ก็คือ ($\Delta x = 0$, Δy มีค่าน้อย)

$$u_B = u + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y, \quad v_B = v + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y$$

ในกรณีของการโก่งมีค่าน้อยมาก เทอมที่อยู่ในรูปของอนุพันธ์จะมีค่าน้อย ดังนั้น $(\partial v / \partial x)\Delta x$ มีค่าน้อยเมื่อเปรียบเทียบกับ $\Delta x + (\partial u / \partial x)\Delta x$ เพราะฉะนั้น $Q'D' \approx \Delta x + (\partial u / \partial x)\Delta x$ อัตราการยืดตัวของ QD คือ

$$\varepsilon_x = \frac{Q'D' - QD}{QD} = \frac{\left[\Delta x + (\partial u / \partial x)\Delta x\right] - \Delta x}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{1-27}$$

ในทำนองเดียวกันความเครียดในทิศทาง y หรืออัตราการยืดตัวของ QB ก็คือ

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{1-28}$$

เนื่องจากมุม BQD ที่เปลี่ยนแปลงไปก็คือความเครียดเฉือนที่จุด Q จากรูปที่ 1-20 จะเห็นว่า $\gamma_{xy} = \alpha + \beta$ และ

$$\tan\alpha = \frac{(\partial v / \partial x)\Delta x}{\Delta x} \quad \text{และ} \quad \tan\beta = \frac{(\partial u / \partial y)\Delta y}{\Delta y} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

เพราะว่าความเครียดมีค่าน้อย ดังนั้น $\tan\alpha \approx \alpha$ และ $\tan\beta \approx \beta$ ดังนั้นความเครียดเฉือนคือ

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \tag{1-29}$$

ถ้าให้ w เป็นการเบนหรือการโก่งที่จุด Q ในทิศทาง z ความเครียด ε_z และความเครียดเฉือน γ_{yz} และ γ_{zx} ในระนาบ zy และ zx คือ

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \tag{1-30}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \tag{1-31}$$

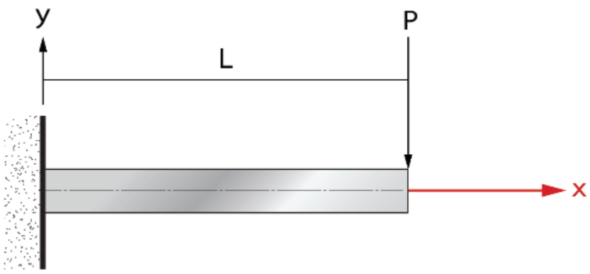
$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \tag{1-32}$$

ในกรณีที่ชิ้นส่วนมีขนาดบางในทิศทาง z สภาวะของความเค้น $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0$ (ความเค้นระนาบ) การโก่งในทิศทาง x และ y ของ u และ v จะเป็นฟังก์ชั่นของ x และ y เท่านั้น ดังนั้นถ้าทราบสนามการกระจัด u(x, y) และ v(x, y) ก็จะหาความเครียดได้โดยสมการ (1-27), (1-28), และ (1-29) และถ้าทราบความเครียดก็สามารถหาความเค้นได้จากสมการ (1-19), (1-20), (1-21) และ (1-22)

<u>ตัวอย่างที่ 1.1</u> จงหา (ก) การโก่งในแนวดิ่งที่ $x = L, y = 0$, (ข) สภาวะของความเค้นของคานในรูป โดยสมมุติให้คานมีขนาดบาง และมีสนามการกระจัดดังนี้

$$u(x,y) = \frac{P}{EI}(Lx - \frac{x^2}{2})y - \frac{\mu P y^3}{6EI}$$

$$v(x,y) = -\frac{\mu P}{2EI}(L-x)y^2 - \frac{P}{EI}(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6})$$



รูปตัวอย่างที่ 1.1

(ก) การโก่งในแนวดิ่งที่ $x = L$ และ $y = 0$ คือ

จาก $$v(x,y) = -\frac{\mu P}{2EI}(L-x)y^2 - \frac{P}{EI}(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6})$$

ดังนั้น $$v(L,0) = -\frac{P}{EI}(\frac{L^3}{2} - \frac{L^3}{6}) = -\frac{PL^3}{3EI}$$

(ข) หาสภาวะของความเค้น จาก

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{P}{EI}(L-x)y, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\mu P}{EI}(L-x)y$$

และ $$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \left[\frac{\mu P y^2}{2EI} - \frac{P}{EI}(Lx - \frac{x^2}{2})\right] + \frac{P}{EI}(Lx - \frac{x^2}{2})y - \frac{\mu P y^2}{2EI} = 0$$

แทนค่าลงในสมการ (1.8) และ (1.9) ดังนั้น

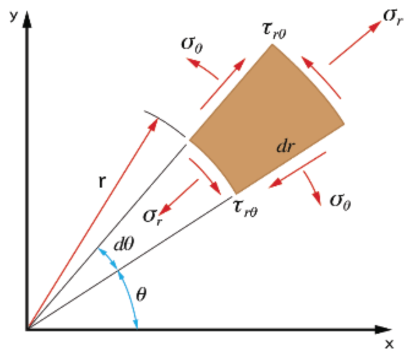
$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}\left[\frac{P}{EI}(L-x)y - \frac{\mu^2 P}{EI}(L-x)y\right] = \frac{P}{I}(L-x)y$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}\left[-\frac{\mu P}{EI}(L-x)y + \frac{\mu P}{EI}(L-x)y\right] = 0$$

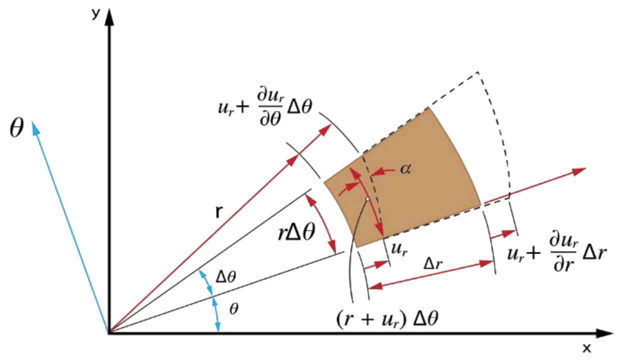
$$\tau_{xy} = 0$$

1.5 ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น, ความเครียดและการกระจัดในพิกัดโพลา

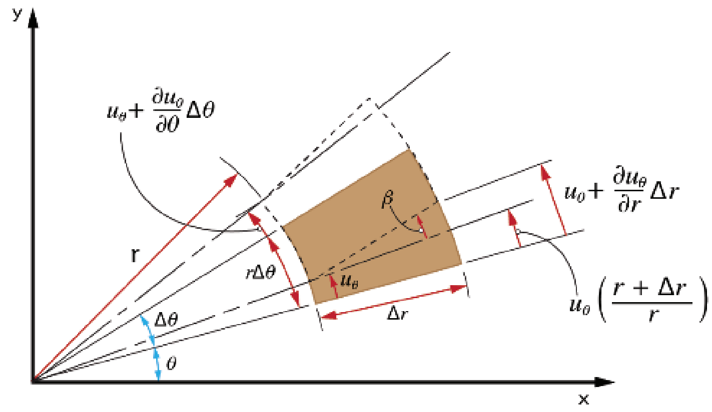
มีปัญหาจำนวนมากที่ไม่สามารถจะใช้พิกัดคาร์ทีเซียนกำหนดหรืออธิบายรูปร่างของปัญหาได้ เช่น ปัญหาพวกทรงกระบอกบางหรือหนาที่มีความดันกระทำ ปัญหาวงแหวนและกลม คานโค้ง เป็นต้น ซึ่งปัญหาเหล่านี้จะใช้พิกัดโพลาแทน ในรูป 1-21 ก ชิ้นส่วนเล็กๆ จะถูกกำหนดตำแหน่งและขนาดโดยพิกัด $r-\theta$ และสมมุติให้มีความเค้น และความเค้นเฉือนเกิดขึ้น เช่นในรูปดังกล่าว ถ้า dz เป็นความหนาของชิ้นส่วนในทิศทาง z ส่วน Δr และ $\Delta\theta$ มีขนาดเข้าใกล้ศูนย์



(ก) ความเค้นบนชิ้นส่วน $drd\theta$



(ข) การกระจัดในทิศทางรัศมี



(ค) การกระจัดในทิศทางตั้งฉากกับรัศมี

รูปที่ 1-21 ชิ้นส่วนบนพิกัดโพลา

ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดในพิกัดโพลานั้น สามารถหาได้ในทำนองเดียวกันกับความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดพิกัดคาร์ทีเซียนคือ

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}\left[\sigma_r - \mu\left(\sigma_\theta + \sigma_z\right)\right]$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}\left[\sigma_\theta - \mu\left(\sigma_z + \sigma_r\right)\right]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu\left(\sigma_r + \sigma_\theta\right)\right] \quad (1\text{-}33)$$

และ
$$\gamma_{r\theta} = \frac{2(1-\mu)}{E}\tau_{r\theta}$$
$$\gamma_{\theta z} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{\theta z}$$
$$\gamma_{zr} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{zr} \qquad (1\text{-}34)$$

ส่วนความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการกระจัดในพิกัดโพลาหาได้ในทำนองเดียวกับพิกัดคาร์ทีเซียนตามที่กล่าวมาแล้วคือ จะสมมุติให้ชิ้นส่วนยืดออกในทิศทางรัศมีและในทิศทางที่ตั้งฉากกับรัศมี เช่น ในรูป 1-21ข และ 1-21ค (เส้นประ) ดังนั้นความเครียดทางรัศมีทั้งหมดคือ

$$\varepsilon_r = \frac{u_r + (\partial u_r / \partial r)\Delta r - u_r}{\Delta r} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \qquad (1\text{-}35)$$

และความเครียดทางตั้งฉากกับรัศมีคือ

$$\varepsilon_\theta = \frac{(r + u_r)\Delta\theta - r\Delta\theta}{r\Delta\theta} + \frac{u_\theta + (\partial\mu_\theta / \partial\theta)\Delta\theta - \mu_r}{r\Delta\theta}$$
$$= \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} \qquad (1\text{-}36)$$

สำหรับความเครียดเฉือน $\gamma_{r\theta}$ จะเท่ากับ $\alpha + \beta$ ดังนั้น

$$\gamma_{r\theta} = \frac{u_r + (\partial u_r / \partial\theta)\Delta\theta}{r\Delta\theta} + \frac{u_\theta + (\partial u_\theta / \partial r)\Delta r - u_\theta(r + \Delta r)/r}{\Delta r}$$
$$= \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \qquad (1\text{-}37)$$

ส่วนความเครียดในระนาบ θz และ Zr หาได้ในทำนองเดียวกับพิกัดคาร์ทีเซียน คือ

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \gamma_{\theta z} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z}, \quad \gamma_{zr} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \qquad (1\text{-}38)$$

ในกรณีของปัญหาชนิดแกนสมมาตร เช่น ปัญหาของวงแหวน. θ และการกระจัด u_r และ u_z เป็นอิสระต่อกัน ดังนั้น อนุพันธ์ของ u_r และ u_z ต่อ θ จะมีค่าเท่ากับศูนย์ และเนื่องจากแกนสมมาตร. $u\theta$ จะเท่ากับศูนย์ ดังนั้นสมการ (1-35) ถึงสมการ (1-38) คือ

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r}, \quad \gamma_{r\theta} = 0 \qquad (1\text{-}39)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \gamma_{\theta z} = 0, \quad \gamma_{zr} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \qquad (1\text{-}40)$$

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 1

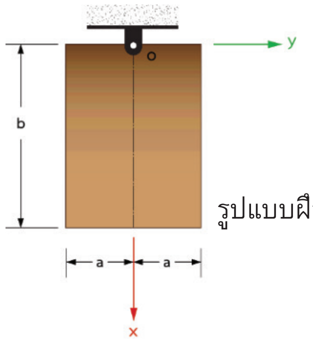
1) ที่จุดใดจุดหนึ่งของวัสดุ ถ้า $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ และวัสดุมีค่า $E = 20\times10^{10} N/m^2$ และ $\mu = 0.3$ และถ้า $\varepsilon_x = 24\times10^{-6} m/m$, $\varepsilon_y = 24\times10^{-6} m/m$ จงหาค่า $\sigma_z, \sigma_y, \sigma_z$

2) วัสดุอันหนึ่งมีความเครียดเกิดขึ้น คือ $\varepsilon_x = 1000\times10^{-6} m/m$, $\varepsilon_y = -500\times10^{-6} m/m$ และ $\varepsilon_z = 200\times10^{-6} m/m$ ถ้าค่าคงที่ $E = 7\times10^{10} N/m^2$ และ $\mu = 0.3$ จงหาค่า $\sigma_z, \sigma_y, \sigma_z$

3) สมมุติให้แผ่นบางขนาด $2a \times b$ ในรูปข้างล่างมีความหนา t โดยที่ D คือ Weight density ของวัสดุที่ใช้ทำแผ่นบาง และถ้าสนามการกระจัดโดยประมาณที่เกิดขึ้นจากน้ำหนักของแผ่นบางคือ

$$u(x,y) = \frac{D}{2E}(2bx - x^2 - \mu y^2)$$

$$v(x,y) = -\frac{\mu D}{E} y(b - x)$$



รูปแบบฝึกหัดข้อ 3)

(ก) จงหาสนามความเค้นระนาบ $\sigma_z(x, y), \sigma_y(x, y), \tau_{xy}(x, y)$

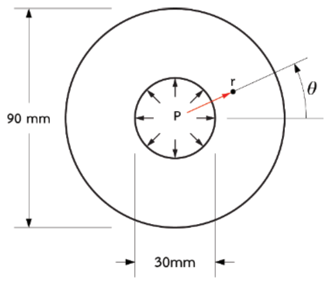
(ข) จงเขียนรูปร่างของแผ่นบางที่ผิดรูปไป

4) ถ้าความเค้นเทนเซอร์ที่จุดใดจุดหนึ่งของวัสดุ คือ $|\sigma| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \\ -3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \times 10^7 N/m^2$

จงหาคำนวณหาค่าความเครียด ถ้า $E = 20\times10^{10} N/m^2$ และ $\mu = 0.3$ ($\varepsilon_x = -175\times10^{-6} m/m$, $\varepsilon_y = -45\times10^{-6} m/m$, $\varepsilon_z = 280\times10^{-6} m/m$, $\gamma_{zy} = 130\times10^{-6} m/m$, $\gamma_{yz} = 520\times10^{-6} m/m$, $\gamma_{zx} = -39\times10^{-6} m/m$)

5) ตามรูปวงแหวน (thin ring) ข้างล่าง ถ้ากำหนดให้ความเค้นตั้งฉากเป็นฟังก์ชั่นกับรัศมี r ดังนี้

$$\sigma_r = 625 - \frac{5625}{r^2}, \quad \sigma_\theta = 625 + \frac{5625}{r^2}, \quad \sigma_z = 0$$



รูปแบบฝึกหัดข้อ 5)

ค่าคงที่ $E = 21\times10^{10} N/m^2$ และ $\mu = 0.29$

(ก) จงหาความเครียด (normal strain) ในเทอมของรัศมี r ในช่วง $3 \le r \le 9$

(ข) จงหาเส้นรอบวงที่ $r = 90mm$ ในขณะที่ก่อนและหลังความเค้น P กระทำ

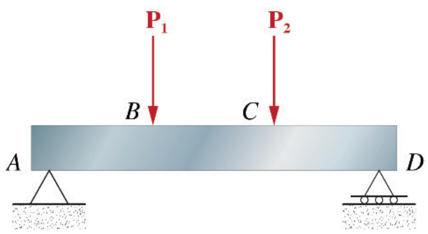
บทที่ 2
แรงเฉือนและจุดศูนย์กลางแรงเฉือน

2.1 บทนำ

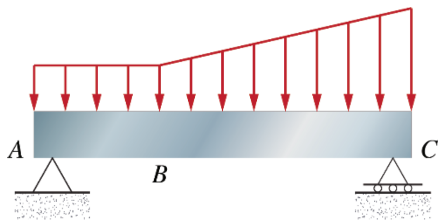
ในบทนี้เราจะวิเคราะห์ทั้งความเค้นในแนวตั้งฉากและความเค้นเฉือนของชิ้นส่วนโครงสร้างที่มีหน้าตัดคงที่และรับ “แรงเฉือนตามแนวขวาง (transverse shear)” โดยการพิจารณาความเค้นเฉือนตามแนวขวางและตามแนวยาวของชิ้นส่วนโครงสร้างโดยการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของแรงภายในระหว่างโมเมนต์ดัดและแรงเฉือน อีกทั้งการวิเคราะห์แรงเฉือนไหลเพื่อใช้สำหรับหน้าตัดของคานรูปแบบต่างๆ และจุดศูนย์กลางแรงเฉือน

2.2 แรงเฉือนตามแนวขวางบนชิ้นส่วนโครงสร้างที่มีหน้าตัดคงที่

โดยทั่วไปแรงเฉือนตามแนวขวางจะเกิดขึ้นเมื่อชิ้นส่วนโครงสร้างที่อยู่ในแนวนอน ซึ่งเรียกว่า “คาน (beam)” รับแรงในแนวดิ่ง ซึ่งส่วนใหญ่มักมีหน้าตัดสี่เหลี่ยม สมมาตร และแกนหลักมักตัดผ่านจุดศูนย์กลางของหน้าตัด CG หรือ centroid แรงที่กระทำอาจกระทำเป็นจุด (รูปที่ 2-1(ก)) หรือ แบบกระจาย (รูปที่ 2-1(ข)) หรืออาจหลายแบบรวมกัน และมักมีสมมติฐานให้แนวแรงกระทำผ่านจุด centroid โดยแนวแรงดิ่งจะอยู่ในแนวแกนหลักหรือไม่ก็ได้



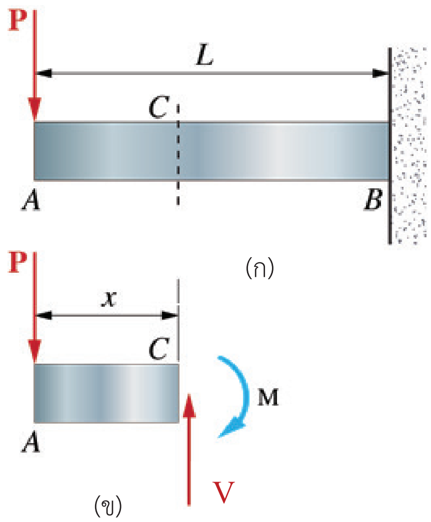
(ก) Concentrated loads



(ข) Distributed loads

รูปที่ 2-1 แรงทั่วไปที่กระทำกับคานในแนวดิ่ง

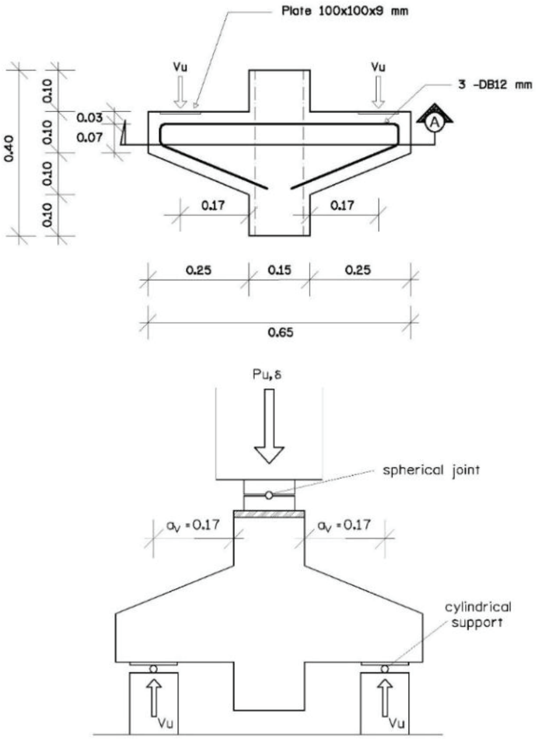
พิจารณาคานยื่น AB ซึ่งมีปลาย B ยึดแน่นและมีแรง P ขึ้นกระทำบนปลาย A ซึ่งเป็นปลายอิสระ (รูปที่ 2-2(ก)) เมื่อพิจารณาหน้าตัด C และรูปแสดงการสมดุลของช่วง AC (รูปที่ 2-2 (ข)) เราจะพบว่าแรงภายในที่กระทำบนช่วง AC จะต้องเทียบเท่ากับแรงเฉือน V ซึ่งมีขนาด $V = P$ และโมเมนต์ M ซึ่งมีขนาด $M = Px$ โดยที่ x เป็นระยะทางจากจุด C ไปยังปลายอิสระ A จะเห็นว่าโมเมนต์ดัด M มีเครื่องหมายเป็นลบ สำหรับเครื่องหมายของแรงเฉือน V ในที่นี้จะกำหนดให้ V มีเครื่องหมายเป็นลบ เมื่อแรงเฉือน V กระทำในทิศทางดังแสดงในรูปที่ 2-2(ข) นั่นคือเมื่อแรงเฉือนที่กระทำบนส่วนของคานที่อยู่ทางด้านซ้ายของหน้าตัดมีทิศทางขึ้น

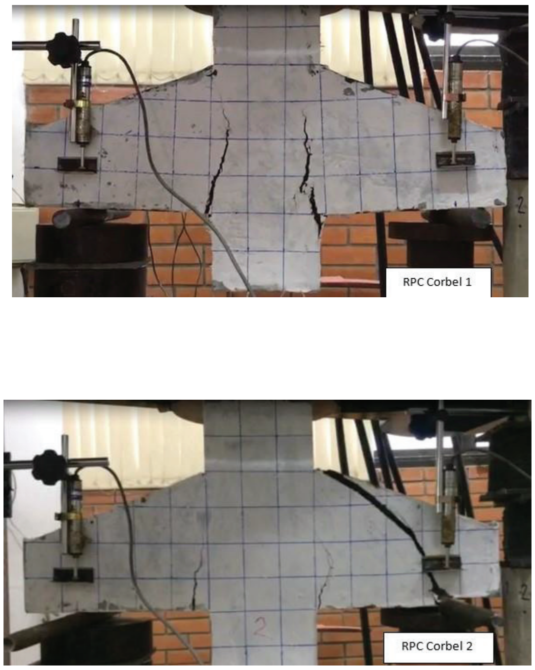


รูปที่ 2-2 การวิเคราะห์แรงภายในชิ้นส่วนคาน

คานธรรมดาโดยทั่วไปเมื่อน้ำหนักกระทำต่อคาน คานจะเกิดการโก่งตัวจากการดัดเป็นหลัก ระนาบของหน้าตัดก่อนและหลังการดัดยังคงเป็นระนาบเส้นตรงเดียวกันไม่เปลี่ยนแปลง สำหรับคานลึกจะมีพฤติกรรมที่แตกต่างกันออกไป โดยจะมีการโก่งตัวจากผลของการดัดร่วมกับการเฉือน ซึ่งระนาบของหน้าตัดจะเป็นลักษณะไม่เป็นเชิงเส้นตลอดความลึกของคาน ยังมีคานอีกประเภทหนึ่งซึ่งเป็นคานช่วงสั้นมากๆ หรือที่เรียกว่า “แป้นหูช้างหรือคานหูช้าง (corbel) ตามมาตรฐานสถาบันคอนกรีตอเมริกัน (American Concrete Institute : ACI)” ถือว่าเป็นคานยื่นช่วงสั้นชนิดหนึ่ง เป็นคานที่ยื่นออกมาจากเสามีลักษณะรูปสามเหลี่ยมหรือสี่เหลี่ยมคางหมูคล้ายใบหูของช้าง คานจะรับแรงเฉือน แรงดัด กระทำร่วมกันจนทำให้เกิดแรงทแยง (diagonal tension) ทำให้มีพฤติกรรมการโก่งตัวที่ซับซ้อนอีกแบบหนึ่ง

แรงเฉือนของคานยื่นจะมีค่าสูงสุดที่จุดรองรับ ซึ่งคานอาจจะวิบัติจากแรงเฉือนนี้ได้ ตัวอย่างเช่น คานหูช้างที่เป็นโครงสร้างคอนกรีตมีการวิบัติเนื่องจากแรงเฉือนตามแนวผิวสัมผัสระหว่างเสากับคานหูช้าง ซึ่งเป็นบริเวณที่มีแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดสูงสุดเพื่อประเมินพฤติกรรมของการวิบัติ จึงมีวิธีการออกแบบการรับแรงเฉือนที่เรียกว่า วิธีการแรงเฉือน-แรงเสียดทาน (shear friction) การวิบัติของคานหูช้างอาจเกิดขึ้นบริเวณขอบเสา เมื่อใช้วัสดุสมัยใหม่พฤติกรรมการวิบัติอาจจะเปลี่ยนไป ตัวอย่างการทดสอบคานหูช้างที่ใช้คอนกรีตกำลังสูงเสริมเส้นใยเหล็กเป็นคานหูช้างแบบคู่ ขั้นตอนการให้แรงกระทำต่อคานแบบกลับหัวเพื่อให้ง่ายต่อการติดตั้งคานและอุปกรณ์ทดสอบ โดยจำลองแรงกระทำนั้นจากสภาวะจริงที่เกิดขึ้น ซึ่งเปรียบเสมือนคานที่ยื่นออกไปทั้งสองด้าน [9] (รูปที่ 2-3 และ 2-4) ผลจากการทดสอบจะเห็นได้ว่าเกิดการวิบัติที่บริเวณขอบเสาจากแรงเฉือนเป็นหลัก เหมือนกับการวิบัติของคานยื่นทั่วไป

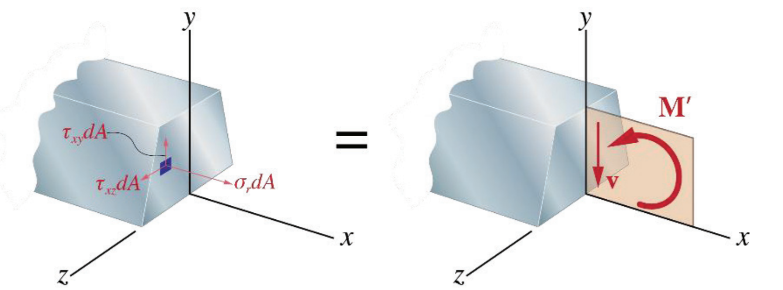




รูปที่ 2-3 ขนาดและการทดสอบคานหูช้าง [9]

รูปที่ 2-4 ลักษณะการวิบัติของคานหูช้าง [9]

เมื่อพิจารณาจากตัวอย่างข้างต้นเฉพาะในส่วนของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัด แรงเฉือนที่กระทำคานทำให้เกิดแรงภายใน โดยมีสมดุลของแรงภายใน ดังนี้ ผลรวมของแรงในแนวตั้งฉากและแรงเฉือนที่จุดเล็กๆ ที่กระทำบนหน้าตัดจะต้องเทียบเท่ากับแรงเฉือน V และโมเมนต์ดัด M (รูปที่ 2-5) ผลรวมของแรงในแนวตั้งฉากมีค่าเป็นศูนย์และผลรวมของโมเมนต์ของเราเหล่านั้นรอบแกน y และแกน z มีค่าเท่ากับศูนย์ และ M ตามลำดับ อย่างไรก็ตามในกรณีของแรงตามแนวขวาง ค่าโมเมนต์ดัด M จะแปรผันตามตำแหน่งของหน้าตัดที่พิจารณาสำหรับแรงเฉือน $\tau_{xy}dA$ และ $\tau_{xz}dA$ ที่พิจารณาจากโมเมนต์ของแรงเฉือนรอบแกน x สามารถตัดทิ้งไปได้เนื่องจากหน้าตัดสมมาตรเทียบกับระนาบ xy คงไว้ซึ่งสมการที่เกี่ยวข้องในแนวแกน y และแกน z ของแรงเฉือนนั่นคือ



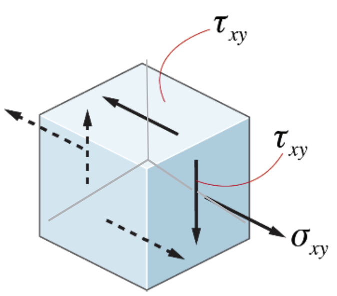
รูปที่ 2-5 แรงเฉือนและโมเมนต์ดัดมีการทำบนหน้าตัด

ทิศทางแนวแกน y $\int \tau_{xy}\, dA = -V$

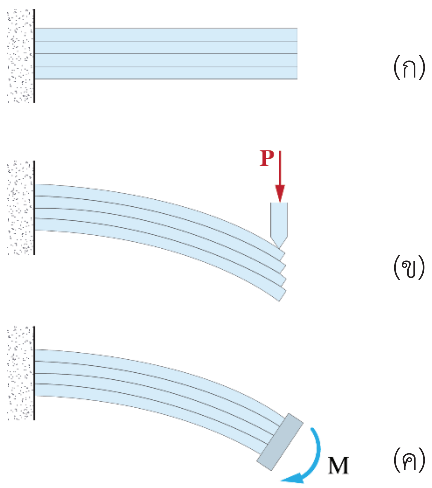
ทิศทางแนวแกน z $\int \tau_{xz}\, dA = 0$

ทิศทางแนวแกน y แสดงให้เห็นว่าจะต้องมีความเค้นเฉือนในแนวดิ่งอยู่บนหน้าตัดขวางใดๆ ก็ตามในคาน และจะมีเครื่องหมายเป็นลบ นั่นคือมีทิศชี้ลง สำหรับทิศทางแนวแกน z แสดงว่าค่าเฉลี่ยของความเค้นเฉือนในแนวนอนบนหน้าตัดขวางใดๆ ก็ตามจะมีค่าเป็นศูนย์ซึ่งความเค้นเฉือน τ_{xz} ไม่จำเป็นต้องมีค่าเป็นศูนย์ที่ทุกๆ จุด

จากการพิจารณาชิ้นส่วนเล็กๆ รูปลูกบาศก์ซึ่งอยู่ในระนาบของการสมมาตรในแนวดิ่ง ($\tau_{xz} = 0$) และพิจารณาความเค้นที่กระทำบนแต่ละหน้าของชิ้นส่วน (รูปที่ 2-6) ความเค้นในแนวตั้งฉาก σ_x และความเค้นเฉือน τ_{xy} กระทำบนด้านทั้ง 2 ที่ตั้งฉากกับแกน x เมื่อความเค้นเฉือน τ_{xy} กระทำบนหน้าในแนวดิ่งของชิ้นส่วนแล้ว เพื่อสมดุลจะต้องมีความเค้นที่มีขนาดเท่ากันกระทำบนหน้าในแนวนอนของชิ้นส่วนเดียวกัน ดังนั้นจึงสรุปได้ว่าจะเกิดความเค้นเฉือนตามแนวความยาวของคานด้วย ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้โดยพิจารณาคานยื่นซึ่งได้จากการนำแผ่นไม้หลายๆ แผ่นมาเรียงซ้อนกันและยึดจับปลายด้านหนึ่งไว้ (รูปที่ 2-7(ก)) เมื่อมีแรงตามแนวขวาง P มากระทำที่ปลายอิสระของคานประกอบนี้ แผ่นไม้จะเกิดการเลื่อนไถล (รูปที่ 2-7(ข)) อย่างไรก็ตามในคานที่เป็นเนื้อเดียวกันทั้งหมดและมีแรงยึดเหนี่ยวซึ่งกันและกันนั้น จะไม่มีการเลื่อนไถลเกิดขึ้น จึงทำให้เกิดความเค้นบนระนาบในแนวนอนซึ่งอยู่ตามความยาวของคาน เช่นเดียวกับที่เกิดบนระนาบตามขวางซึ่งอยู่ในแนวดิ่ง ในทางตรงกันข้ามถ้าคานเดียวกันนี้รับเฉพาะโมเมนต์ดัด M ที่ปลายอิสระ (รูปที่ 2-7(ค)) แผ่นไม้แต่ละแผ่นจะมีการโก่งตัวเป็นรูปโค้งและจะไม่มีการเลื่อนไถลเกิดขึ้น ซึ่งทำให้พิสูจน์ได้ว่าไม่มีแรงเฉือนเกิดขึ้นในคานที่รับแรงดัดอย่างเดียว



รูปที่ 2-6 ความเค้นตั้งฉากและความเค้นเฉือน



รูปที่ 2-7 ตัวอย่างการเกิดแรงเฉือน

2.3 ความเค้นเฉือนในคานสี่เหลี่ยมผืนผ้า

คานหน้าตัดสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่รับแรงดัดและแรงเฉือน ดังรูปที่ 2-8 โดยเมื่อพิจารณาชิ้นส่วนพื้นที่เล็กๆ ความเค้นเฉือนจะเกิดขึ้นเท่ากันทั้งในแนวดิ่งและแนวราบ โดยสมการทั่วไปของหน่วยแรงที่ทำให้เกิดความเค้นเฉือนนั้น คือ

$$\tau = \frac{VQ}{It} \tag{2-1}$$

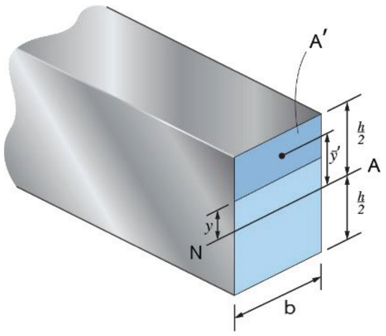
โดยที่ τ = ความเค้นเฉือนในหน้าตัด ณ จุดห่างจากแกนสะเทินเป็นระยะ y ซึ่งมีค่าความเค้นเฉลี่ยคงที่ตลอดความกว้างคาน t

V = แรงเฉือนภายในตามแนวขวางที่คำนวณได้จากวิธีการใช้ภาคตัดและสมการของสมดุล

I = โมเมนต์ความเฉื่อยของหน้าตัดคาน คำนวณรอบแกนสะเทิน x-x

t = ความกว้างของหน้าตัดคานที่ระยะ y

Q = โมเมนต์อันดับแรกของพื้นที่รอบแกนสะเทิน (A') คือ $\int_{A'} y\,dA' = \bar{y}'A'$ ซึ่งพิจารณาพื้นที่ตั้งแต่ y ห่างออกไปจนถึงผิวไกลสุดของหน้าตัดนั้น ๆ โดยที่ $\bar{y}'$ คือระยะจากแกนสะเทิน (NA : neutral axis) ถึงจุดศูนย์ถ่วงพื้นที่ A'



รูปที่ 2-8 การพิจารณาความเค้นเฉือนในคาน

ตัวอย่างคานหน้าตัดเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าเป็นหน้าตัดที่นิยมใช้กันทั่วไป กำหนดให้ความกว้างของคานมีค่าคงที่ตลอดความยาวเท่ากับ b ดังนั้น ค่า t มีค่าเท่ากับ b ความลึกคานเท่ากับ h ความเค้นเฉือน τ ของหน้าตัดนี้มีค่าเท่ากับ

$$\tau = \frac{6V}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) \tag{2-2}$$

พิสูจน์ได้ดังนี้

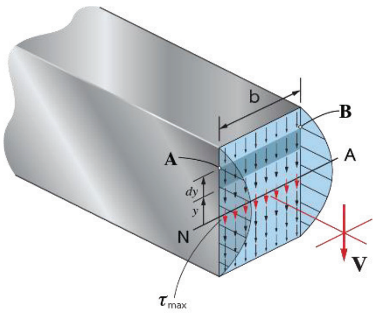
$$Q = \bar{y}' \quad = \left[y + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - y\right)\right]\left(\frac{h}{2} - y\right)b \qquad (2\text{-}3)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)b$$

จากสมการความเค้นเฉือน (สมการที่ 2-1) จะได้ว่า

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{V\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)b}{\left(\frac{1}{12}bh^3\right)b} \qquad (2\text{-}4)$$

จะเห็นได้ว่าสมการที่ 2-2 เป็นการกระจายความเค้นเฉือนตลอดหน้าตัดคานเป็นลักษณะพาราโบลา ดังรูปที่ 2-9 โดยพิจารณาจากสมการมีตัวแปรเป็น y^2 ค่าความเค้นเฉือนจะมีค่าเป็นศูนย์ที่ขอบบนสุดและล่างสุด ($y = \pm h/2$) ของหน้าตัดคาน และค่าความเค้นเฉือนจะมีค่าสูงสุดที่แกนสะเทิน $y = 0$



รูปที่ 2-9 การกระจายความเค้นเฉือน

จากการพิจารณาสมการที่ 2-2 เมื่อแทนค่า $y = 0$, $A = bh$ จะได้

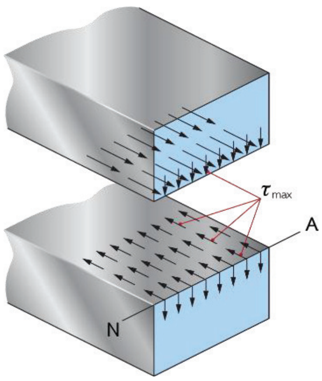
$$\tau_{max} = \frac{3V}{2bh} = 1.5\frac{V}{A} \qquad (2\text{-}5)$$

เพื่อเป็นการพิสูจน์สมมุติฐานในการหาค่า τ_{max} ในสมการที่ 2-5 สามารถหา τ_{max} ได้โดยตรงจากสมการที่ 2-1 จากการที่ V, I และ t มีค่าคงที่นั้น ค่าที่ทำให้ความเค้นเฉือนมีค่าสูงสุดคือ ค่าของ Q นั่นเอง ดังนั้นเมื่อพิจารณาสมการค่า $Q = \bar{y}'A'$ จะมีค่าสูงสุดที่แกนสะเทินซึ่งจะได้พื้นที่เหนือแกนสะเทินสูงสุด $A' = bh/2$ และ $\bar{y}' = h/4$ จะได้

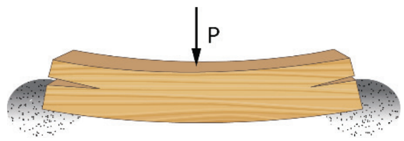
$$\tau_{max} = \frac{VQ}{It} = \frac{V(h/4)(bh/2)}{\left(\frac{bh^3}{12}\right)b} = 1.5\frac{V}{A} \qquad (2\text{-}6)$$

ทั้งสมการที่ 2-5 และ 2-6 เห็นได้ว่า ค่า τ_{max} มีค่าเป็น 1.5 เท่าของความเค้นเฉือนตามแนวขวางเฉลี่ย $\tau_{avg} = V/A$

ความเค้นเฉือนตามยาวสมการที่ 2-1 และความเค้นเฉือนตามแนวขวางเฉลี่ย $\tau_{avg} = V/A$ มีความสัมพันธ์กัน สามารถพิจารณาได้ว่า ค่าความเค้นเฉือนสูงสุด τ_{max} ณ ตำแหน่งแกนสะเทิน มีทิศทางตามขวางจะมีค่าเท่ากับความเค้นเฉือนสูงสุดตามแนวนอนดังรูปที่ 2-10 ซึ่งความเค้นเฉือนจากแรงเฉือนในแนวดิ่งดังกล่าวอาจมีผลทำให้คานเกิดการแตกหักแบบผ่าซีกในแนวยาวที่ตำแหน่ง แกนสะเทินได้ ถ้าความต้านทานความเค้นเฉือนของวัสดุที่ทำคานนั้นมีค่าต่ำ เช่น คานไม้ต่างๆ เป็นต้น (ดูรูปที่ 2-11)



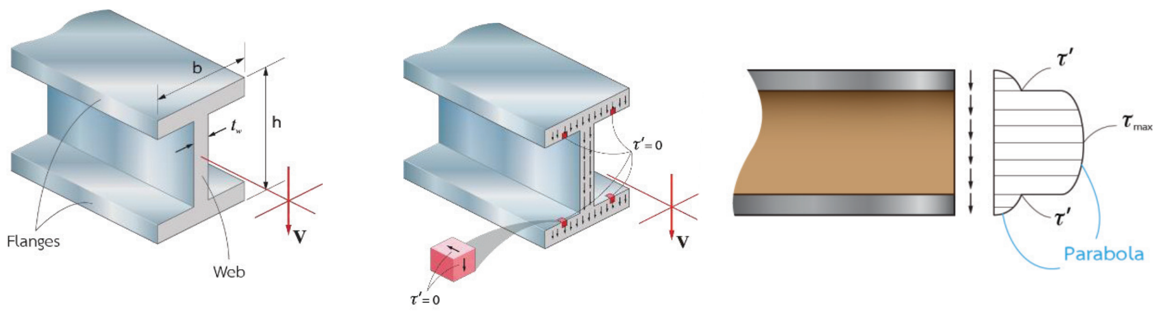
รูปที่ 2-10 ความเค้นเฉือนตามแนวยาวสูงสุด



รูปที่ 2-11 การแตกร้าวที่เกิดขึ้นตามแนวยาวของคาน

การใช้งานของสมการที่ 2-1 ประยุกต์ใช้กับคานหน้าตัดสี่เหลี่ยมผืนผ้า ทำให้การวิเคราะห์ความเค้นเฉือนได้ง่ายขึ้น จึงได้นำสมการนี้มาพิจารณาใช้กับคานหน้าตัดที่แตกต่างไป โดยคานรูปตัดแบบปีกกว้าง (wide-flange beam) เป็นหน้าตัดเหล็กรูปพรรณที่นิยมใช้ไปของงานโครงสร้าง ประกอบด้วยส่วนปีก (flange) และส่วนตั้ง (web) ดังรูปที่ 2-12 การวิเคราะห์การกระจายความเค้นบนหน้าตัดคานสามารถพิจารณาคล้ายกับหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าจากสมการที่ 2-1 ซึ่งความเค้นเฉือนที่เกิดขึ้นนี้จะมีลักษณะเป็นรูปพาราโบลาตลอดความลึกของคาน h แต่มีการเปลี่ยนแปลงอย่างฉับพลันของความเค้นเฉือนที่จุดต่อระหว่างส่วนปีกและส่วนตั้งเนื่องจากเมื่อพิจารณาสมการที่ 2-1 แล้ว ค่าความหนา t ในสมการเกิดการเปลี่ยนแปลงอย่างฉับพลัน ณ จุดรอยต่อจากความหนา t_w เป็น b นั่นเอง เมื่อพิจารณาสมการที่ 2-1 t_w น้อยกว่า b จะเห็นได้ว่าความเค้นเฉือนจะมีค่าค่อนข้างมากในส่วนตั้งของหน้าตัด ดังแสดงในรูป 2-12(ค)

แต่จากการพิจารณานั้นความเค้นเฉือนที่ส่วนปีกของคานนั้นไม่ได้เป็นไปตามสมการที่ 2-1 คือการกระจายของความเค้นเฉือนเกิดขึ้นเป็นลักษณะพาราโบลา ที่จริงแล้วส่วนปีกนั้นจะให้ค่าความเค้นเฉือน $\tau' = 0$ (ดูรูป 2-12(ข)) เนื่องจากพื้นที่ตรงจุดนั้นไม่ได้เกิดการเฉือนกันระหว่างภายในเนื้อของวัสดุพื้นผิวนั้นถูกตัดหายไปและไม่สัมผัสกับวัตถุอื่น โดยเมื่อ $\tau' = 0$ ในแนวตามยาวของคานแล้วจะส่งผลไปให้ความเค้นเฉือนในแนวขวางต้องมีค่าเท่ากับศูนย์เพื่อความสมดุลด้วย อย่างไรก็ตาม ในการออกแบบหน้าตัดเชิงวิศวกรรมนั้นค่าความเค้นเฉือนที่ได้จากสมการที่ 2-1 นั้น ที่ส่วนปีกของคานไม่มีนัยสำคัญมาก โดยปกติการออกแบบจะคำนึงถึงความเค้นเฉือนที่มากที่สุดมาใช้งาน

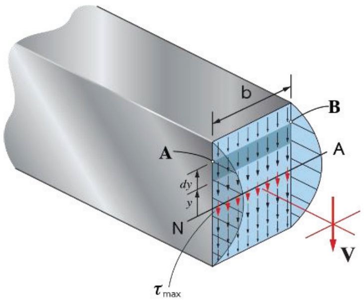


(ก) (ข) (ค)

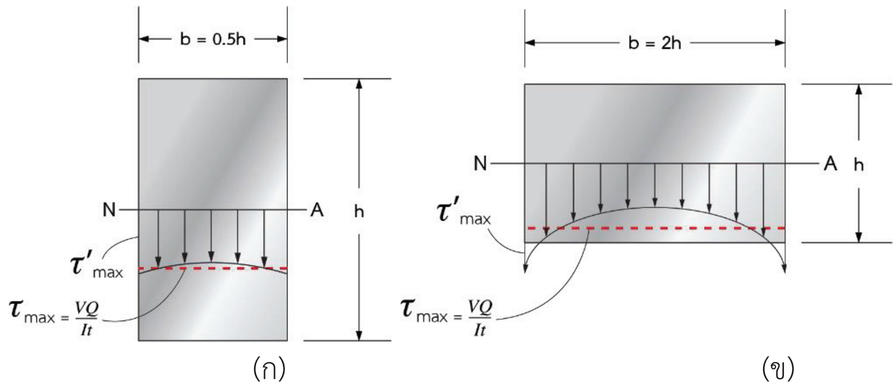
รูปที่ 2-12 การกระจายความเค้นเฉือนที่เกิดกับคานปีกกว้าง

ข้อจำกัดสำหรับการใช้สมการความเค้นเฉือน พิจารณาแล้วเห็นว่าในสมการความเค้นเฉือนที่ 2-1 มีการกระจายอย่างสม่ำเสมอตลอดความกว้าง t ของหน้าตัดคาน ตัวอย่างเช่น ที่ตำแหน่ง y ใดๆ ที่ระดับเดียวกัน จุด A และ B จะมีค่าความเค้นเฉือนเท่ากัน ดังรูปที่ 2-13 อย่างไรก็ตาม ถ้าวิเคราะห์โดยใช้ทฤษฎีของความยืดหยุ่นในเชิงคณิตศาสตร์แล้ว อัตราส่วนของ b/h จะมีผลต่อการกระจายความเค้นเฉือน การกระจายความเค้นเฉือนที่แท้จริงตลอดความกว้างคานนั้นที่ตำแหน่งแกนสะเทินจะมีรูปร่างดังรูปที่ 2-14 ค่าความเค้นเฉือนที่มากที่สุด เกิดขึ้นบนขอบด้านซ้ายสุดและขวาสุดของหน้าตัด ซึ่งขนาดของ τ'_{max} จะขึ้นอยู่กับลักษณะรูปร่างหน้าตัดในอัตราส่วนของ b/h ถ้า b/h น้อยกว่า 1 ค่าความแตกต่างระหว่าง τ'_{max} และ τ_{max} ที่ได้จากสมการที่ 2-1 จะมีค่าน้อย (ดูรูป 2-9(ก)) แต่ถ้าค่า b/h ยิ่งมีค่ามาก ค่าความแตกต่างระหว่าง τ'_{max} และที่ τ_{max} ได้จากสมการที่ 2-1 จะมีค่ามากขึ้นไปด้วย (ดูรูปที่ 2-9(ข)) ส่งผลทำให้ความผิดพลาดจากสมการนั้นยิ่งสูงมาก เช่น ถ้า b/h = 0.5 ค่า τ'_{max} มีค่ามากกว่า τ_{max} ค่าประมาณ 3% ซึ่งถ้า b/h = 2 ค่า τ'_{max} มีค่ามากกว่า τ_{max} มากถึงประมาณ 40% ค่าความผิดพลาดนี้เป็นผลให้การใช้สมการความเค้นเฉือนสำหรับหน้าตัดของคานปีกกว้างผิดพลาดไปด้วยได้ การออกแบบหน้าตัดจึงควรพิจารณาให้อัตราส่วน b/h มีค่าน้อยมากเพื่อให้ได้ค่าความเค้นเฉือนที่ใกล้เคียงกับค่าความเค้นเฉือนแท้จริงมากที่สุด

ข้อจำกัดอีกประการหนึ่งของสมการความเค้นเฉือนที่ 2-1 คือ คานที่มีสถานะหน้าตัดไม่แน่นอน ความกว้างของหน้าตัดไม่เท่ากันตลอดความลึก ดังรูปที่ 2-15 ค่าความเค้นเฉือนที่กระจายบนหน้าตัดที่เส้น AB จะมีค่าเท่ากันตลอดความกว้างถ้าใช้สมการที่ 2-1 ดังรูปที่ 2-15(ข) แต่ที่แท้จริงแล้วค่าความเค้นเฉือนที่จุด B จะต้องขนานไปกับหน้าตัด ดังรูปที่ 2-15(ค) และ 2-15(ง) ความเค้นเฉือนที่ผิวด้านนอกสุดนั้นที่ผิวสัมผัสนั้นจะมีค่า $\tau' = 0$ และทำให้ τ' ในระนาบของ เนื้อวัสดุ มีค่าเท่ากับศูนย์ด้วย (รูปที่ 2-15(ค))



รูปที่ 2-13 ความเค้นเฉือนที่ระดับเดียวกัน



รูปที่ 2-14 ข้อจำกัดของสูตรความเค้นเฉือนที่เกิดกับคานหน้าตัดต่างๆ

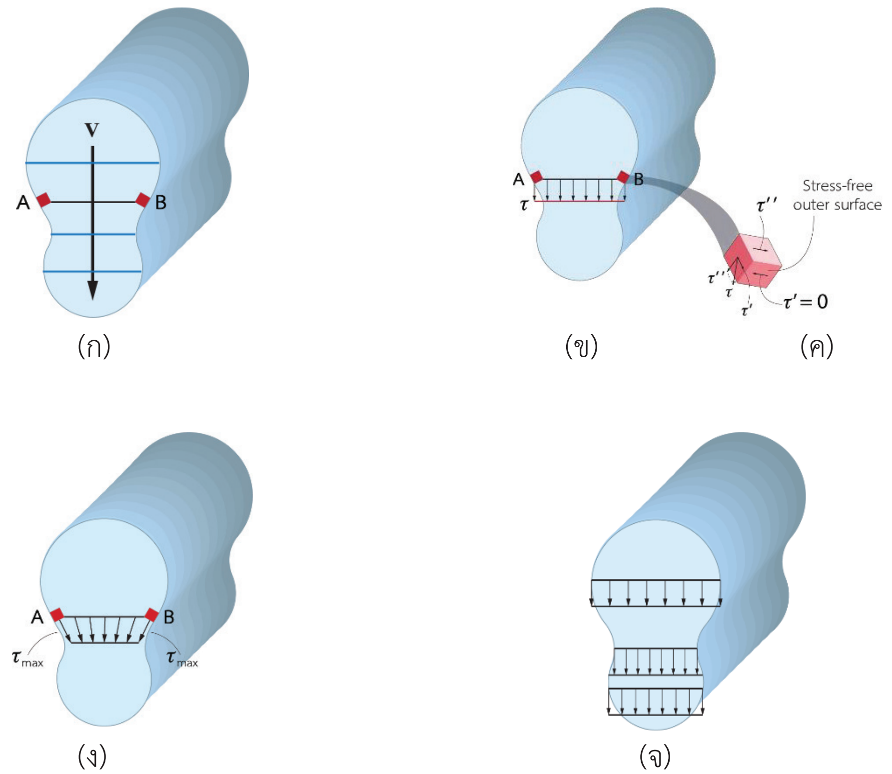
ดังนั้น สมการความเค้นเฉือนนั้นจะมีนิยามตามการพิสูจน์ข้างต้น โดยที่ชิ้นส่วนจะต้องมีรูปร่างลักษณะเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีอัตราส่วน b/h น้อยมาก ความกว้างหน้าตัดคงที่ ไม่มีจุดที่เปลี่ยนแปลงหน้าตัดทันที มีรูปร่างแน่นอน สำหรับรูปร่างอื่นๆ ที่มีหน้าตัดไม่แน่นอนนั้น สามารถหาความเค้นเฉือนโดยใช้วิธีจากทฤษฎีของความยืดหยุ่น

ขั้นตอนทั่วไปสำหรับการวิเคราะห์หาความเค้นเฉือน

1) จากสมการความเค้นเฉือนที่ 2-1 ต้องวิเคราะห์หาแรงเฉือน V ที่หน้าตัดนั้นๆ ก่อน

2) หาโมเมนต์ความเฉื่อย I และค่าความกว้าง t ในจุดที่พิจารณา

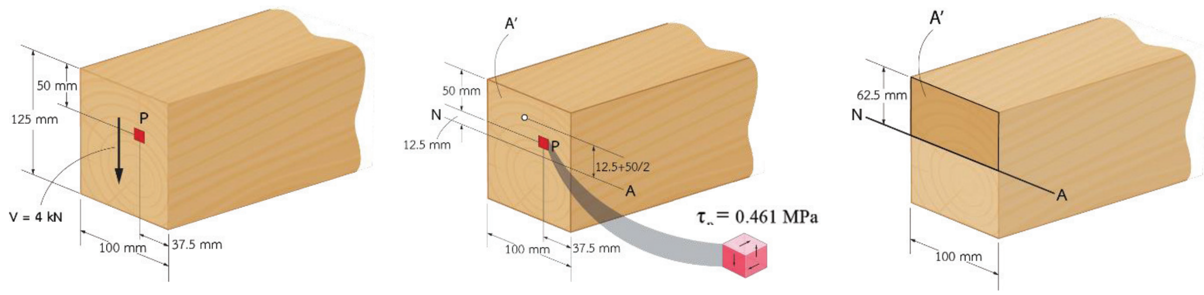
3) พิจารณาหาค่า Q จาก $Q = \bar{y}'A'$ โดย A' จะเป็นพื้นที่อยู่ห่างจากแกนสะเทินออกไป และ $\bar{y}'$ คือจุด centroid ของพื้นที่ A' นั่นเอง



รูปที่ 2-15 ข้อจำกัดของสูตรความเค้นเฉือนกับหน้าตัดที่ไม่แน่นอน

ตัวอย่างที่ 2.1

คานดังแสดงในรูป ถูกกระทำด้วยแรงเฉือนในแนวดิ่ง V = 4 kN จงคำนวณหาหน่วยแรงเฉือนในคานที่จุด P และหน่วยแรงเฉือนที่เกิดขึ้นสูงสุด



รูปตัวอย่างที่ 2.1

หาคุณสมบัติของหน้าตัด นั่นคือ โมเมนต์ของความเฉื่อยของพื้นที่หน้าตัดรอบแกนสะเทิน

$$I = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12}(100\,\text{mm})(125\,\text{mm})^3 = 16.28\times10^6\ \text{mm}^4$$

หน่วยแรงเฉือนที่จุด P สามารถพิจารณาหาค่า Q จาก A' คือพื้นที่ด้านบนของคานนับตั้งแต่จุด P เป็นต้นไปดังรูป

$$Q = \bar{y}'A' = \left[12.5 + \frac{1}{2}(50\,\text{mm})\right](50\,\text{mm})(100\,\text{mm}) = 18.75\times10^{4}\ \text{mm}^{3}$$

ดังนั้น หน่วยแรงเฉือนที่จุด P คำนวณได้จากสมการที่ 2-1

$$\tau_{P} = \frac{VQ}{It} = \frac{(4\,\text{kN})(18.75\times10^{4}\ \text{m}^{3})}{(16.28\times10^{6}\ \text{mm}^{4})(100\,\text{mm})} = 4.61\times10^{-4}\text{kN/mm}^{2} = 0.461\,\text{MPa}$$

การหาหน่วยแรงเฉือนสูงสุดของหน้าตัดทำได้ 2 วิธีจากสมการที่ 2-1 และ สมการที่ 2-6 โดยหน่วยแรงเฉือนสูงสุดนั้นจะเกิดขึ้นบริเวณแกนสะเทิน ดังนั้น A' ที่ได้จะเป็นพื้นที่ส่วนบนแกนสะเทินทั้งหมด

$$Q = \bar{y}'A' = \left[\frac{62.5\,\text{mm}}{2}\right](100\,\text{mm})(62.5\text{mm}) = 19.53\times10^{4}\ \text{mm}^{3}$$

ดังนั้น หน่วยแรงเฉือนสูงสุด คำนวณได้จากสมการที่ 2-1

$$\tau_{max} = \frac{VQ}{It} = \frac{(4\,\text{kN})(19.53\times10^{4}\ \text{mm}^{3})}{(16.28\times10^{6}\ \text{mm}^{4})(100\,\text{mm})} = 4.80\times10^{-4}\text{kN/mm}^{2} = 0.480\,\text{MPa}$$

หน่วยแรงเฉือนสูงสุด คำนวณได้จากสมการที่ 2-6 จะได้ค่าหน่วยแรงสูงสุดเท่ากัน คือ

$$\tau_{max} = 1.5\frac{V}{A} = 1.5\frac{4\,\text{kN}}{(100\,\text{mm})(125\,\text{mm})} = 4.80\times10^{-4}\text{kN/mm}^{2} = 0.480\,\text{MPa}$$

2.4 แรงเฉือนหน้าตัดของคานประกอบ

โดยทั่วไปโครงสร้างที่ออกแบบอาจจะเป็นการประกอบกันของชิ้นส่วนที่เป็นรูปเรขาคณิตมีการต่อเชื่อมด้วยตะปู สลักเกลียวและการเชื่อม เป็นต้น (รูปที่ 2-16) รอยต่อเชื่อมที่จุดต่างๆ จึงต้องมีการส่งถ่ายแรงกันอย่างมีประสิทธิภาพ โดยเฉพาะแรงเฉือนที่เกิดขึ้นตามแนวยาวของชิ้นส่วน คำนวณจากแรงต่อหนึ่งหน่วยความยาว เรียกอีกชื่อว่า การไหลของแรงเฉือน q

หลักการคำนวณหาการกระจายแรงเฉือนบนหน้าตัดตามยาวของคานสามารถหาได้โดยการกระจายแรงเฉือนที่รอยต่อของรอยต่อชิ้นส่วนของปีกคาน แรงกระทำตามแนวราบดังแสดงในรูปที่ 2-17 แรง F และ F + dF เกิดขึ้นเนื่องจากแรงตั้งฉากปกติโดยโมเมนต์ M และ M + dM ตามลำดับ ส่วนแรง dF ที่ต้านนั้นเพื่อให้เกิดความสมดุล ที่เปรียบเสมือนแรงเฉือนที่เกิดขึ้นที่รอยต่อนั้นๆ ดังนั้นเราจะได้สมการ

$$dF = \frac{dM}{I} \times \int_A y\,dA \qquad (2\text{-}7)$$

โดยเกิดขึ้นจาก $\quad y \times dF = dM$

หารด้วย $\int_{A'} y^2 dA$ ทั้งสองด้าน

$$\frac{y \times dF}{\int_A y^2 dA} = \frac{dM}{\int_A y^2 dA}$$

$$\frac{dF}{\int_A y\,dA} = \frac{dM}{\int_A y^2 dA}$$

$$dF = \frac{dM}{\int_A y^2 dA} \times \int_A y\,dA$$

$$dF = \frac{dM}{I} \times \int_A y\,dA$$

ค่าที่ได้จากการอินทิเกรต คือ ค่า Q ซึ่งเป็นโมเมนต์ของพื้นที่ A' ($Q = \int_A ydA' = \bar{y}'A'$)

ในรูปที่ 2-17 คำนวณรอบแกนสะเทินของหน้าตัด เนื่องจากความยาวของชิ้นส่วนเท่ากับ dx ดังนั้นการไหลของแรงเฉือน (shear flow หรือแรงต่อหนึ่งหน่วยความยาวตามแนวคาน q = dF/dx) หารทั้งสองข้างของสมการข้างต้น (สมการที่ 2-7) ด้วย dx และสมการ V = dM/dx จะได้

$$\frac{dF}{dx} = \left(\frac{dM}{dx}\right)\left(\frac{1}{I}\right)\left(\int_{A'} ydA\right)$$

$$\frac{dF}{dx} = \left(\frac{dM}{dx}\right)\left(\frac{1}{I}\right)(Q)$$

จาก $\quad V = dM/dx \quad$ ดังนั้น $\quad q = \dfrac{VQ}{I} \qquad (2\text{-}8)$

เมื่อ

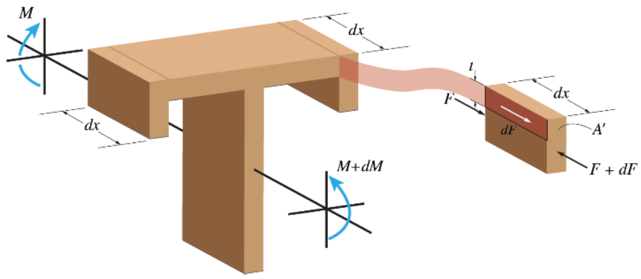
q = การไหลของการเฉือน หรือแรงเฉือนต่อหนึ่งหน่วยความยาวตามคาน

V = แรงเฉือนที่เกิดขึ้นภายในหน้าตัดคาน ณ ตำแหน่งนั้นๆ

I = โมเมนต์ความเฉื่อยของหน้าตัดคาน คำนวณรอบแกนสะเทิน x-x

Q = โมเมนต์อันดับแรกของพื้นที่รอบแกนสะเทิน (A') คือ $\int_{A'} ydA' = \bar{y}'A'$

รูปที่ 2-16 ตัวอย่างรูปแบบของหน้าตัดคานประกอบ

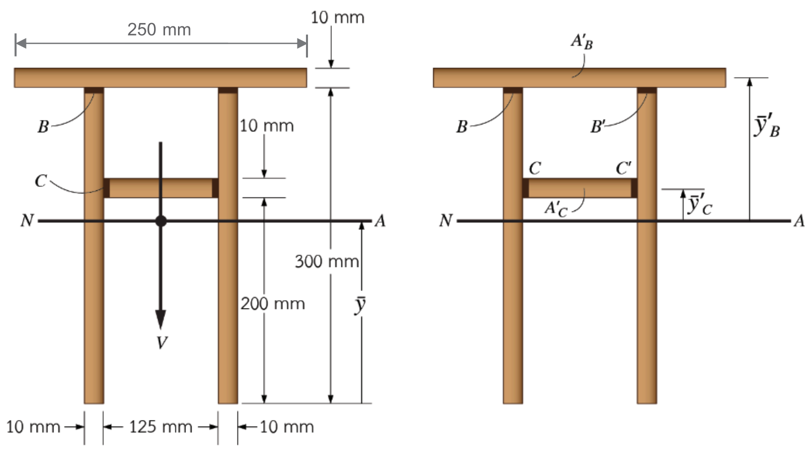


รูปที่ 2-17 แรงเฉือนที่เกิดขึ้นกับคานประกอบ

ในหัวข้อนี้เป็นพื้นฐานการออกแบบรอยต่อเชื่อมของโครงสร้าง โดยการหาระยะห่างของอุปกรณ์ยึดที่ใช้ต้านทานแรงเฉือน เช่น ตะปู สกรู น็อต หมุดย้ำและรอยเชื่อม เป็นต้น โดยสามารถวิเคราะห์เบื้องต้นได้ด้วยวิธีการที่กล่าวมาข้างต้น ซึ่งคือค่า q ซึ่งเป็นแรงเฉือนต่อหน่วยความยาวตามคาน เช่น N/m, N/mm, kgf/m เป็นต้น นำมาพิจารณาเปรียบเทียบกับความสามารถในการต้านทานแรงเฉือนของรอยเชื่อมหรืออุปกรณ์ยึด ตัวอย่างเช่น การไหลของแรงเฉือน q = 10 N/mและหมุดย้ำต้านทานแรงเฉือนได้ 2 Nต่อตัว ดังนั้นต้องใช้หมุดย้ำ 5 ตัวต่อความยาวคาน 1 m.

<u>ตัวอย่างที่ 2.2</u>

คานประกอบดังรูป ไม้ยึดติดกันโดยใช้กาวอีพ็อกซี่ เพื่อให้คานนั้นรับแรงเฉือนได้ 1200 kN จงหาว่าแรงเฉือนไหลที่เกิดขึ้นที่ จุด B และ C เป็นเท่าไหร่ (โดยมีสมมติฐานว่ากาวอีพ็อกซี่ รับกำลังได้สูงกว่าไม้มาก และไม่เกิดการวิบัติที่จุดต่อ



รูปตัวอย่างที่ 2.2

หาคุณสมบัติของหน้าตัด นั่นคือ โมเมนต์ของความเฉื่อยของพื้นที่หน้าตัดรอบแกนสะเทิน โดยเริ่มต้นจากการหาจุดศูนย์ถ่วงของหน้าตัดก่อน

$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}A}{\sum A} = \frac{2(0.15\,\text{m})(0.3\,\text{m}\times 0.01\,\text{m}) + (0.205\,\text{m})(0.125\,\text{m}\times 0.01\,\text{m}) + (0.305\,\text{m})(0.250\,\text{m}\times 0.01\,\text{m})}{2(0.3\,\text{m}\times 0.01\,\text{m}) + (0.125\,\text{m}\times 0.01\,\text{m}) + (0.250\,\text{m}\times 0.01\,\text{m})}$$

$$= 0.1968\text{ m}$$

โมเมนต์ของความเฉื่อยของพื้นที่หน้าตัดรอบแกนสะเทิน

$$I = 2\left[\frac{1}{12}(0.01\,\text{m})(0.3\,\text{m})^3 + (0.01\,\text{m})(0.3\,\text{m})(0.1968\,\text{m} - 0.150\,\text{m})^2\right]$$

$$+ \left[\frac{1}{12}(0.125\,\text{m})(0.01\,\text{m})^3 + (0.125\,\text{m})(0.01\,\text{m})(0.205\,\text{m} - 0.1968\,\text{m})^2\right]$$

$$+ \left[\frac{1}{12}(0.250\,\text{m})(0.01\,\text{m})^3 + (0.250\,\text{m})(0.01\,\text{m})(0.305\,\text{m} - 0.1968\,\text{m})^2\right]$$

$$= 87.52\times 10^{-6}\text{m}^4$$

ที่จุด B นั้นมี B' ช่วยต้านแรงเฉือน จึงคิดพื้นที่ A' ทั้งชิ้นส่วน

$$Q_B = \bar{y}'_B A'_B = [0.305\,\text{m} - 0.1968\,\text{m}](0.250\,\text{m}\times 0.01\,\text{m}) = 0.27\times 10^{-3}\text{m}^3$$

ที่จุด C มีลักษณะเหมือนกับจุด B เช่นกัน โดยที่มีจุด C' ช่วยต้านแรงเฉือน

$$Q_C = \bar{y}'_C A'_C = [0.205\,\text{m} - 0.1968\,\text{m}](0.125\,\text{m}\times 0.01\,\text{m}) = 0.01025\times 10^{-3}\text{m}^3$$

คำนวณหาแรงเฉือนไหลที่ จุด B และ B'

$$q'_B = \frac{VQ_B}{I} = \frac{1200\,\text{kN}(0.270\times 10^{-3}\text{m}^3)}{87.52\times 10^{-6}\text{m}^4} = 3.70\,\text{MN/m}$$

คำนวณหาแรงเฉือนไหลที่ จุด C และ C'

$$q'_C = \frac{VQ_C}{I} = \frac{1200\,\text{kN}(0.01025\times 10^{-3}\text{m}^3)}{87.52\times 10^{-6}\text{m}^4} = 0.1405\,\text{MN/m}$$

คำตอบที่ได้ทั้งจุด B และ C นั้นจะได้

$$q_B = 1.85\,\text{MN/m}$$

$$q_C = 0.07025\text{MN/m}$$

2.5 การไหลของแรงเฉือนในหน้าตัดผนังบาง

การไหลของแรงเฉือน (Shear Flow) จากสมการ 2-8 เป็นแรงเฉือนที่กระทำตามความยาวใดๆ ของหน้าตัดคานที่กล่าวมาในหัวข้อก่อนหน้านี้สามารถนำมาประยุกต์ใช้ในการหาการไหลของแรงเฉือนในส่วนของหน้าตัดผนังบางได้ คือ การสมมุติให้ชิ้นส่วนมีความหนาของผนังมีค่าน้อยเมื่อเทียบกับขนาดความสูงหรือความกว้างของตัวเองนั่นเอง

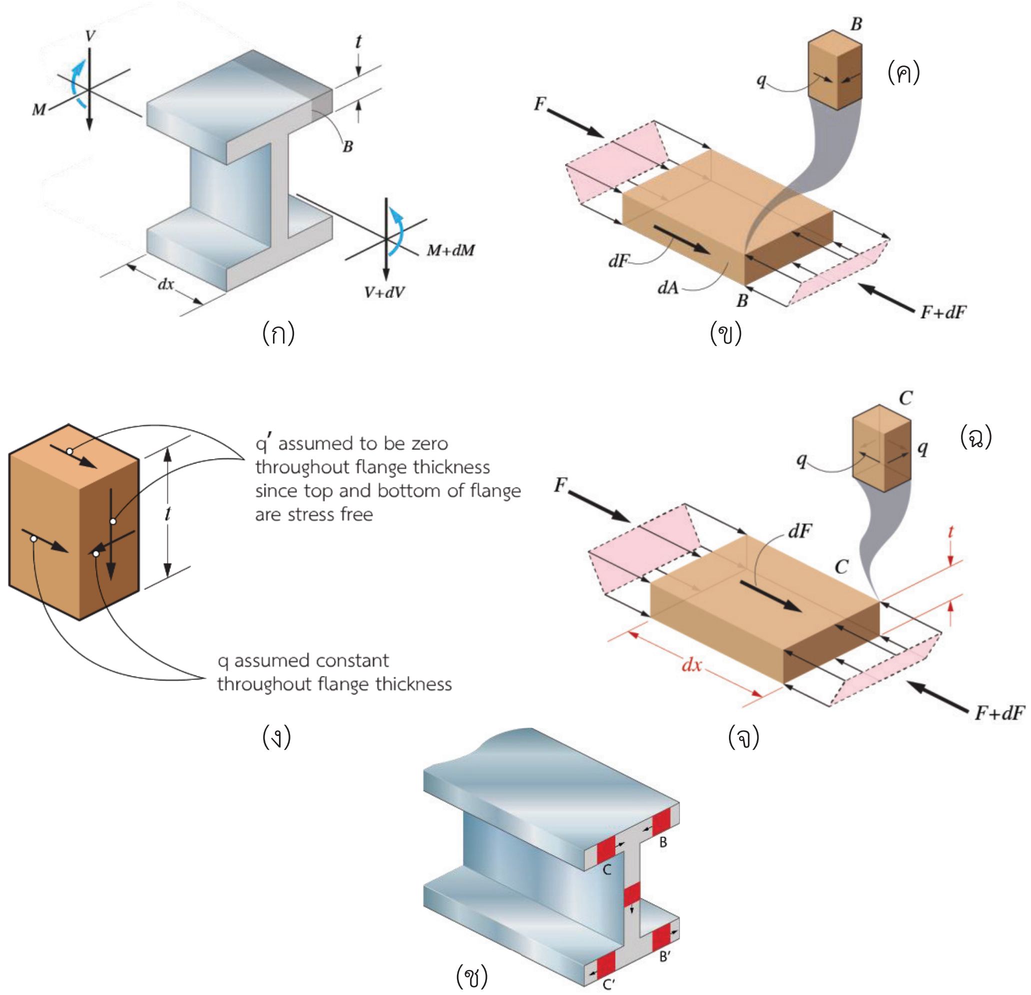
การไหลของแรงเฉือนของคานปีกกว้างนั้นเมื่อพิจารณาตามความยาวเป็นชิ้นเล็กๆ dx ในรูปที่ 2-18(ก) สมดุลของแรงสามารถเขียนอยู่ในรูปที่ 2-18(ข) แรง dF เป็นแรงต้านทานเพื่อความสมดุลจากแรงกระทำ F และ F+dF ที่เกิดโดยโมเมนต์ M และ M+dM ตามลำดับ เนื่องจากชิ้นส่วนมีความยาว dx และการไหลของแรงเฉือนที่พื้นที่ dA จะอยู่ในรูป q = dF/dx แต่เนื่องจากผนังส่วนปีกมีลักษณะบาง หน่วยแรงเฉือน τ จะแตกต่างกันไม่มากตลอดความหนา t ดังนั้นสามารถสมมุติว่ามีค่าคงที่ ก็จะได้ $dF = \tau dA = \tau(tdx) = qdx$ และจะได้

$$q = \tau t \tag{2-9}$$

หรือจากสมการ $q = \dfrac{VQ}{I}$ หาได้จากการคูณ t ในสมการ $\tau = \dfrac{VQ}{It}$

เนื่องจากแรงเฉือนที่กระทำในทิศทางตามยาวและตามขวางมีขนาดเท่ากัน เช่น ที่จุด B ในรูปที่ 2-18(ข) เขียนออกมาในรูปที่ 2-18(ค) โดยพิจารณาทิศทางจากโมเมนต์ดัดทำให้เกิดความเค้นอัดที่ปีกด้านบน และเกิดการกระจายบนปีกคานทั้งสองด้านเป็น F และ dF จึงเกิดการไหลของแรงเฉือน q การไหลของแรงเฉือนกระทำที่พื้นผิวตามขวางในแนวดิ่งนั้นมีค่าเป็นศูนย์ตลอดความหนาของชิ้นส่วนดังแสดงในรูปที่ 2-18(ง) จากสมมุติฐานที่ว่าผนังนั้นมีความบางมาก พื้นผิวที่อยู่ส่วนบนและล่างนั้นเป็นอิสระจากหน่วยแรงเฉือน ดังนั้น สรุปได้ว่าการไหลของแรงเฉือนที่กระทำมีทิศทางในแนวขนานกับผนังของชิ้นส่วนเท่านั้น

ในทำนองเดียวกันการพิจารณาชิ้นส่วนด้านซ้ายมือของปีกคานบนที่จุด C ดังรูปที่ 2-18(จ) จะมีทิศทางของการไหลของการเฉือนในทิศทางตรงข้ามกับที่จุด B ดังรูปที่ 2-18(ฉ) จากนั้นใช้วิธีการเดียวกันนี้พิจารณาทิศทางการไหลของแรงเฉือนที่จุด B' และ C' ในส่วนของปีกล่าง ดังแสดงในรูปที่ 2-18(ช)



รูปที่ 2-18 แรงเฉือนที่เกิดขึ้นกับหน้าตัดบาง

การกระจายของการไหลของแรงเฉือนตามส่วนปีกขวามือบนของคานปีกกว้างในรูปที่ 2-19(ก) พิจารณาได้ดังนี้

$$Q = \bar{y}'A' = \left(\frac{d}{2}\right)\left(\frac{b}{2} - x\right)t$$

ดังนั้น
$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{V(d/2)((b/2) - x)}{I} = \frac{Vtd}{2I}\left(\frac{b}{2} - x\right) \qquad (2\text{-}10)$$

จะเห็นได้ว่าการกระจายนี้เป็นแบบเชิงเส้นโดยที่ค่า $q = 0$ ที่ $x = b/2$ และค่าสูงสุด $(q_{max})_f = Vtdb/4I$ เกิดที่ $x = 0$ (เมื่อพิจารณาว่าความหนาของส่วนตั้งมีค่าบางเช่นกัน) เนื่องจากมีการสมมาตรของหน้าตัด การวิเคราะห์จะมีลักษณะเหมือนกันสำหรับส่วนปีกอื่นๆ และการไหลของแรงเฉือนจะกระทำในทิศทางในรูปที่ 2-19(ข) จะแสดงผลในรูปที่ 2-19(ง)

แรงที่เกิดขึ้นในแต่ละส่วนของปีกคานสามารถหาได้โดยการอินทิเกรต เนื่องจากแรงบนชิ้นส่วนที่แรเงาในรูปที่ 2-19(ข) คือ dF = qdx แล้ว

$$F_f = \int q dx = \int_0^{b/2} \frac{Vtd}{2I}\left(\frac{b}{2} - x\right) dx = \frac{Vtdb^2}{16I} \quad (2\text{-}11)$$

$$F_f = \frac{1}{2}(q_{max})_f \left(\frac{b}{2}\right) = \frac{Vtdb^2}{16I} \quad (2\text{-}12)$$

แรงที่ส่วนปีกทั้งหมดบนหน้าตัดคาน ดังรูปที่ 2-19(จ) จะทำให้เกิดสมดุลของแรงในแนวราบ

การวิเคราะห์ในส่วนตั้งของหน้าตัดคาน ดังรูปที่ 2-19(ค) ทำได้เมื่อ

$$Q = \sum \bar{y}A' = [d/2](bt) + [y + (1/2)(d/2 - y)]t(d/2 - y)$$

$$= bt(d/2) + (t/2)(d^2/4 - y^2)$$

ดังนั้น

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{Vt}{I}\left[\frac{db}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{4} - y^2\right)\right] \quad (2\text{-}13)$$

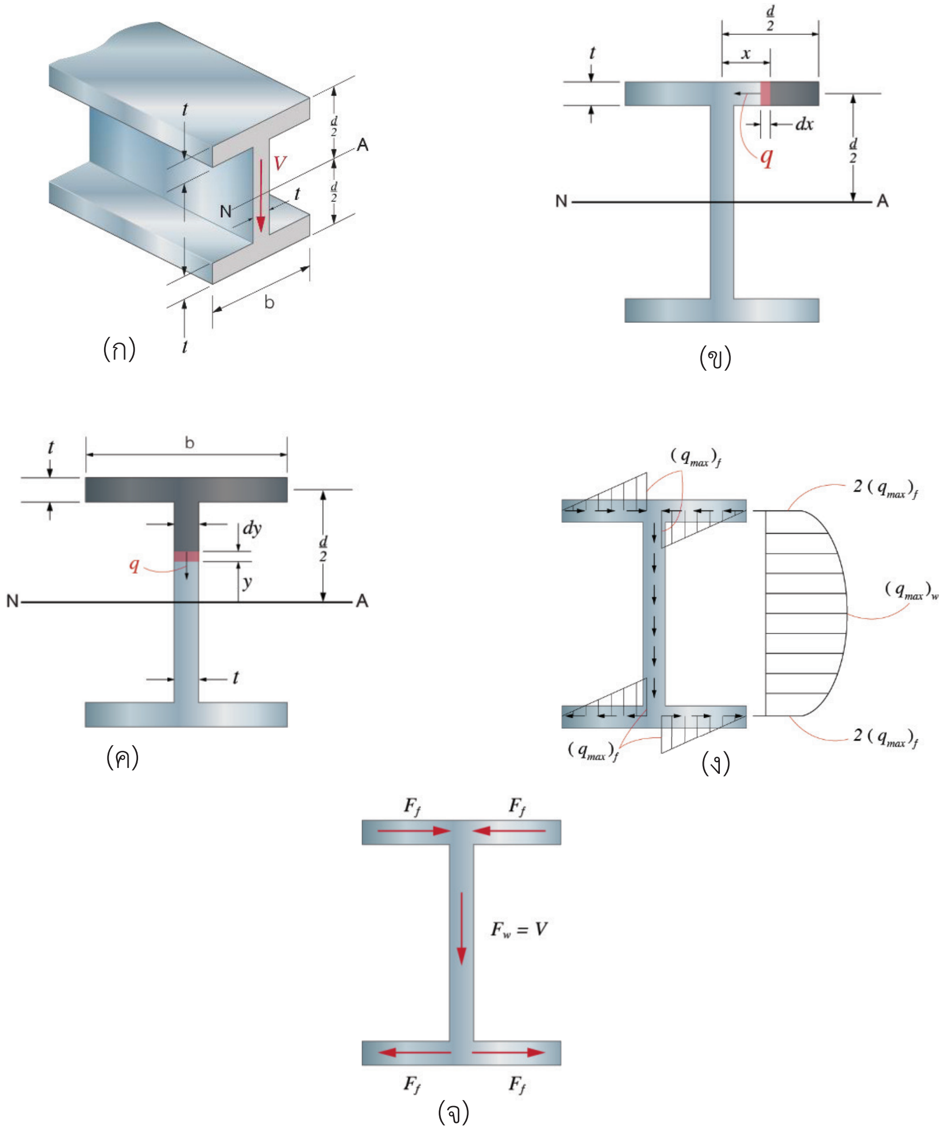
การไหลของแรงเฉือนในส่วนตั้งของหน้าตัดคาน จะมีลักษณะเป็นพาราโบลิกเหมือนกับหน่วยแรงเฉือน โดยมีค่าเริ่มต้นที่ y = d/2 จะได้ q = $2(q_{max})_f$ = Vtdb/2I และค่ามากที่สุดของ q จะอยู่ที่ y = 0 และ q = $(q_{max})_w$ = (Vtd/I)(b/2+d/8) ดังแสดงในรูปที่ 2-19(ง)

เพื่อหาแรงรวมในส่วนตั้ง F_w จะต้องทำการอินทิเกรตสมการที่ 2-13 นั่นคือ

$$F_w = \int q dy = \int_{-d/2}^{d/2} \frac{Vt}{I}\left[\frac{db}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{4} - y^2\right)\right] dy$$

$$= \frac{Vt}{I}\left[\frac{db}{2}y + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{4}y - \frac{1}{3}y^3\right)\right] \Bigg|_{-d/2}^{d/2}$$

$$= \frac{Vtd^2}{4I}\left(2b + \frac{1}{3}d\right) \quad (2\text{-}14)$$



รูปที่ 2-19 การกระจายแรงเฉือนไหลในหน้าตัดบาง

โดยพบว่าโมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่หน้าตัดที่คำนวณได้ดังนี้

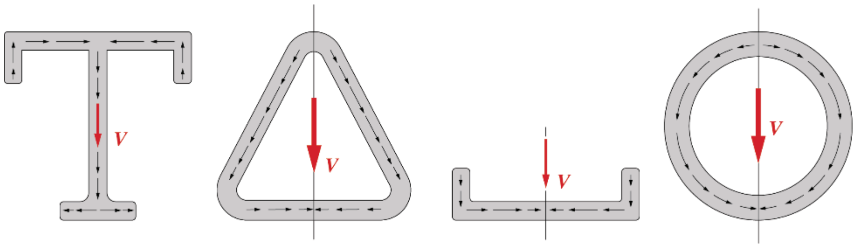
$$I = 2\left[\frac{1}{12}bt^3 + bt\left(\frac{d}{2}\right)^2\right] + \left[\frac{1}{12}td^3\right]$$

สามารถทำให้อยู่ในรูปอย่างง่าย คือ ไม่คิดเทอมแรก ($\frac{1}{12}bt^3$) เนื่องจากความหนา (t) ของแต่ละปีกมีค่าน้อย จะได้ว่า

$$I = \frac{td^2}{4}\left(2b + \frac{d}{3}\right)$$

แทนค่าในสมการข้างต้น พบว่า $F_w = V$ ดังแสดงในรูปที่ 2-19(จ)

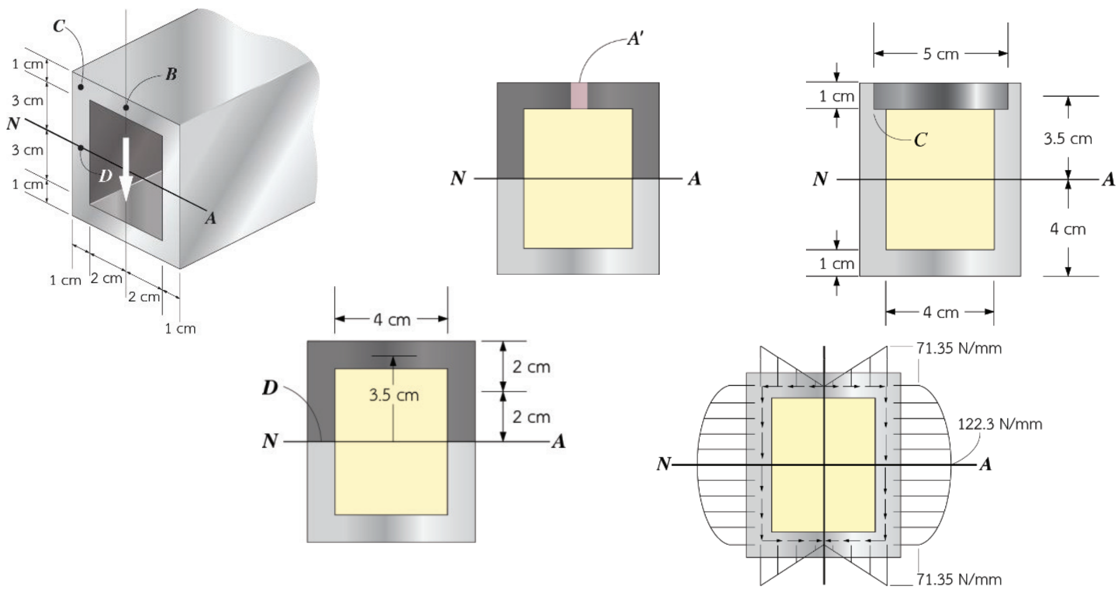
จากการวิเคราะห์ข้างต้น มีสามประเด็นที่ควรสังเกต *ประเด็นแรก* ค่าของ q เปลี่ยนแปลงตลอดหน้าตัด เนื่องจาก Q จะแตกต่างสำหรับแต่ละชิ้นส่วนพื้นที่ A' ที่คำนวณ โดยเฉพาะอย่างยิ่ง q จะแปรค่าเชิงเส้นตามชิ้นส่วน (ส่วนปีก) ที่ตั้งฉากกับทิศทางของ V และจะเป็นรูปพาราโบลิก ตามชิ้นส่วน (ส่วนขาตั้ง) ที่ขนานหรือทำมุมเฉียงกับ V หรือขนานกับ V *ประเด็นที่สอง* q จะกระทำขนานกับผนังของชิ้นส่วน เนื่องจากภาคตัดที่ q คำนวณจะตั้งฉากกับผนัง และ*ประเด็นที่สาม* ทิศทางของ q จะเป็นลักษณะแรงเฉือนที่จะไหลตลอดหน้าตัดเข้ามาที่ส่วนปีกบนของคาน และไหลพุ่งตลอดส่วนขาตั้ง เนื่องจากเป็นแรงเฉือน V และแยกโดยไหลพุ่งออกที่ส่วนปีกล่าง ถ้าจะสามารถทำให้เห็นสภาพของการไหลได้ชัดเจนนั้นจะเป็นการง่ายสำหรับการจัดตั้งไม่เพียงเฉพาะทิศทางของ q แต่ยังรวมไปถึงทิศทางที่สอดคล้องของ τ ตัวอย่างอื่นได้ แสดง q ว่ามีทิศทางตามชิ้นส่วนย่อยของชิ้นส่วนผนังบาง ดังรูปที่ 2-20 ในทุกกรณีการสมมาตรจะอยู่รอบแกนที่อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกันกับ V และผลคือ q จะไหลในทิศทางที่จำเป็นที่ส่วนประกอบของแรงในแนวตั้งเทียบเท่ากับ V และเป็นไปตามสมดุลแรงตามแนวราบของหน้าตัด



รูปที่ 2-20 การไหลของแรงเฉือนหน้าตัดต่างๆ

<u>ตัวอย่างที่ 2.3</u>

โครงสร้างเหล็กกล่องหน้าตัดบางรับแรงเฉือนขนาด 15 kN จงหาการกระจายของแรงเฉือนไหล



รูปตัวอย่างที่ 2.3

คำนวณโมเมนต์ของความเฉื่อยของพื้นที่หน้าตัดรอบแกนสะเทิน โดยใช้หลักของโมเมนต์ของความเฉื่อยรูปสี่เหลี่ยมที่ผิวนอกลบกับโมเมนต์ของความเฉื่อยผิวใน

$$I = \frac{1}{12}(6\,\text{cm})(8\,\text{cm})^3 - \frac{1}{12}(4\,\text{cm})(6\,\text{cm})^3 = 184\,\text{cm}^4$$

จากการพิจารณาชิ้นส่วนในแนวนอนจะเห็นได้ว่าที่จุด B นั้นมีแรงเฉือนไหลเป็นศูนย์ ($Q_B = 0$) และค่าแรงเฉือนไหลสูงสุดจะเกิดขึ้นที่รอยต่อ C ดังนี้

$$Q_C = \bar{y}'A' = (3.5\,\text{cm})(5\,\text{cm}\times 1\,\text{cm}) = 17.5\,\text{cm}^3$$

$$q_C = \frac{VQ_C}{I} = \frac{15\,\text{kN}(17.5\,\text{cm}^3)}{184\,\text{cm}^4} = 1.427\,\text{kN/cm} = 142.7\,\text{N/mm}$$

พิจารณาชิ้นส่วนในแนวตั้งได้ว่า ที่จุด D ได้ค่า

$$Q_D = \sum \bar{y}'A' = 2[2\,\text{cm}](1\,\text{cm}\times 4\,\text{cm}) + [3.5\,\text{cm}](4\,\text{cm}\times 1\,\text{cm}) = 30\,\text{cm}^3$$

$$q_D = \frac{VQ_D}{I} = \frac{15\,\text{kN}(30\,\text{cm}^3)}{184\,\text{cm}^4} = 2.446\,\text{kN/cm} = 244.6\,\text{N/mm}$$

คำตอบที่ได้มีจุด C อยู่ 2 ด้าน และจุด D อยู่ 2 ด้าน ดังนั้นคำตอบสุดท้ายในการกระจายแรงเฉือนไหลคือ

$$q_C = 71.35\,\text{N/mm}$$
$$q_D = 122.3\,\text{N/mm}$$

2.6 จุดศูนย์กลางแรงเฉือน

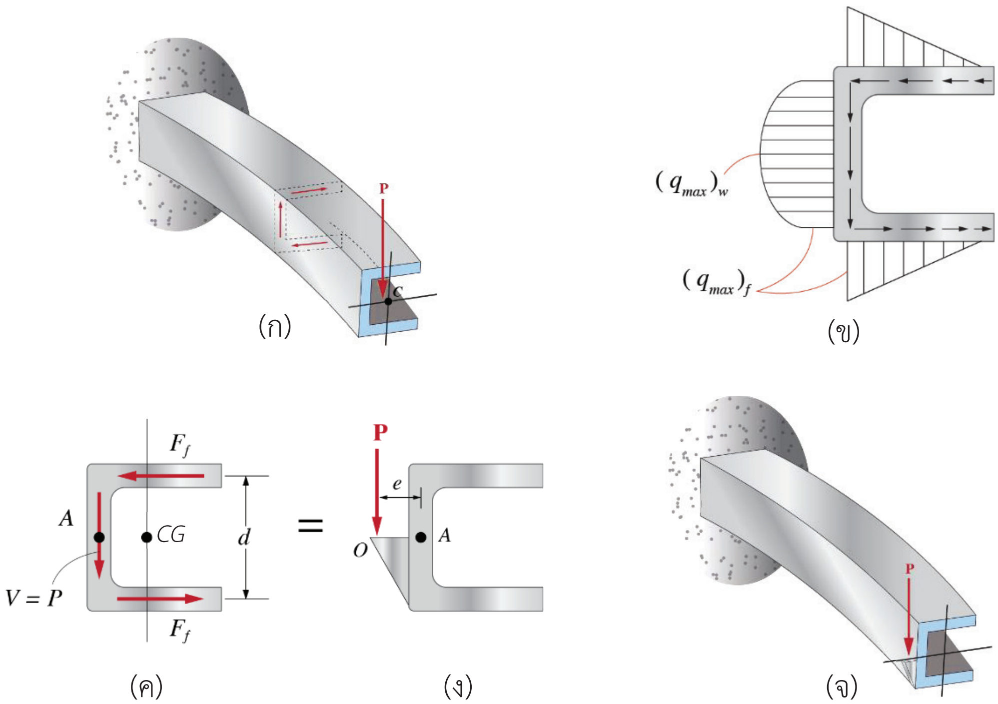
ในหัวข้อที่ผ่านมาเป็นการสมมุติว่าแรงเฉือนภายใน V จะกระทำตามแกนเซนทรอยด์หลักของความเฉื่อย ซึ่งแทนด้วยแกนที่สมมาตรสำหรับหน้าตัด ในหัวข้อนี้จะพิจารณาผลของการกระทำของแรงเฉือนตามแนวแกนเซนทรอยด์หลักที่ไม่ใช่แกนของสมมาตร มีเพียงชิ้นส่วนผนังบางที่จะวิเคราะห์ มิติในแนวเส้นกึ่งกลางของผนังของชิ้นส่วนจะถูกนำมาใช้ ตัวอย่างของกรณีนี้ที่มักพบมักเป็นชิ้นส่วนอาคารเหล็กรูปพรรณที่รับแรงดัดจะเป็นหน้าตัดรูปตัวราง ดังแสดงในรูปที่ 2-21 ซึ่งจะยื่นจากฐานรองรับที่ยึดติดแน่นกับที่และถูกกระทำด้วยแรง P ถ้าแรงนี้ถูกกระทำตามแนวดิ่ง แกนสมมาตรที่ผ่านตลอดเซนทรอยด์ CG ของพื้นที่หน้าตัดรางจะไม่ดัดงอในทิศพุ่งลงจะเกิดการบิดตามเข็มนาฬิกา ดังแสดงในรูป เพื่อให้เข้าใจในสิ่งที่เกิดขึ้นจึงจำเป็นที่จะศึกษาการกระจายการไหลการเฉือนตามส่วนปีกและส่วนขาตั้งของราง ดังแสดงในรูปที่ 2-21(ข)

คล้ายกรณีของคานปีกกว้างที่กล่าวในหัวข้อที่ก่อนหน้านี้ การกระจายการไหลการเฉือนในแต่ละส่วนปีกเป็นแบบเชิงเส้นและในส่วนขาตั้งจะเป็นรูปพาราโบลิก ดังแสดงในรูปที่ 2-21 เมื่อการกระจายนี้ถูกอินทิเกรตครอบคลุมพื้นที่ส่วนปีกและขาตั้ง จะเกิดแรงลัพธ์ F_f ในแต่ละส่วนปีกและแรง V = P ในส่วนขาตั้ง ดังแสดงในรูปที่ 2-21 ถ้าโมเมนต์ของแรงดังกล่าวนี้ถูกรวมรอบ จุด A พบว่า แรงคู่ควบหรือโมเมนต์บิดจะเกิดโดยแรงที่ส่วนปีกจะรับผิดชอบทำให้ชิ้นส่วนบิด เพื่อป้องกันการบิดนี้ ดังนั้นจึงจำเป็นต้องใส่แรง P ที่จุด O อยู่ที่ระหว่าง e จากส่วนขาตั้งของราง ดังแสดงในรูปที่ 2-21(ง) จะได้

$$\sum M_A = F_f d = Pe \quad \text{หรือ} \quad e = \frac{F_f d}{P}$$

การใช้วิธีการที่กล่าวในหัวข้อที่ผ่านมา แรง F_f สามารถหาได้ในรูปของ P (=V) และเมื่อทราบมิติของส่วนปีกและขาตั้งแล้ว P ไม่จำเป็นต้องแทนค่าในสมการข้างต้น และเป็นไปได้ที่จะแสดง e อย่างง่ายในรูปของฟังก์ชั่นของรูปทรงของหน้าตัดไม่ใช่เป็นฟังก์ชั่นของ P หรือตำแหน่งตามความยาวของคาน จุด O เรียกว่า ศูนย์กลางการเฉือนหรือศูนย์กลางการดัด เมื่อ P กระทำที่ศูนย์กลางการเฉือน คานจะดัดงอโดยปราศจากโมเมนต์บิด ดังแสดงในรูปที่ 2-21(จ) คู่มือการออกแบบโดยทั่วไปจะแสดงตำแหน่งของจุดนี้สำหรับคานต่างๆ ที่มีหน้าตัดเป็นผนังบาง และใช้ในทางปฏิบัติ

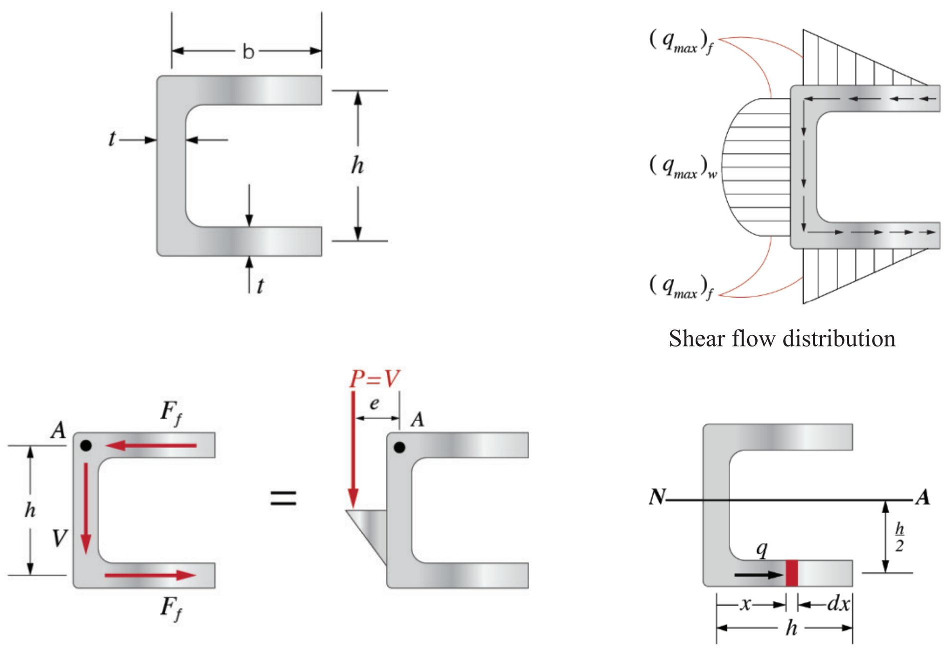
เมื่อทำการวิเคราะห์ พบว่าศูนย์กลางการเฉือนจะอยู่บนแกนของการสมมาตรของพื้นที่หน้าตัดของชิ้นส่วน ยกตัวอย่างเช่น ถ้ารางในรูปที่ 2-21(ก) หมุนไป 90° และ P การทำที่จุด A ดังนี้



รูปที่ 2-21 การหาจุดศูนย์กลางแรงเฉือน

ตัวอย่างที่ 2.4

จากหน้าตัดผนังบางดังรูป จงหาจุดศูนย์กลางแรงเฉือน



รูปตัวอย่างที่ 2.4

การไหลของแรงเฉือนนั้นในชิ้นส่วนแนวตั้งจะมีการกระจายเป็นพาราโบลา และในชิ้นส่วนแนวนอนจะเป็นรูปสามเหลี่ยมดังรูปการกระจายแรงเฉือนไหล อันดับแรกเริ่มต้นจากคำนวณโมเมนต์ของความเฉื่อยของพื้นที่หน้าตัดรอบแกนสะเทิน โดยพิจารณาเป็นชิ้นส่วนแนวตั้งและชิ้นส่วนแนวนอนทั้งบนและล่าง

$$I = \frac{1}{12}th^3 + 2\left[\frac{1}{12}bt^3 + bt\left(\frac{h}{2}\right)^2\right]$$

เนื่องจากหน้าตัดเป็นผนังบาง ค่า t มีค่าน้อยมาก ทำให้ $\frac{1}{12}bt^3$ ยิ่งน้อยมากๆ ดังนั้นจึงประมาณให้เป็นศูนย์

$$I = \frac{th^2}{2}\left(\frac{h}{6} + b\right)$$

การกระจายแรงเฉือนไหลชิ้นส่วนในแนวนอนเป็นสามเหลี่ยมโดยมีค่าสูงสุดที่รอยต่อของปีกคานและชิ้นส่วนแนวตั้ง ดังนั้นจึงสามารถหาค่าแรงเฉือนไหลสูงสุดได้

$$q_{max} = \frac{VQ}{I} = \frac{V(h/2)bt}{(th^2/2)[(h/6)+b]} = \frac{Vb}{h[(h/6)+b]}$$

สามารถคำนวณ $F_f = \frac{1}{2} bq_{max}$

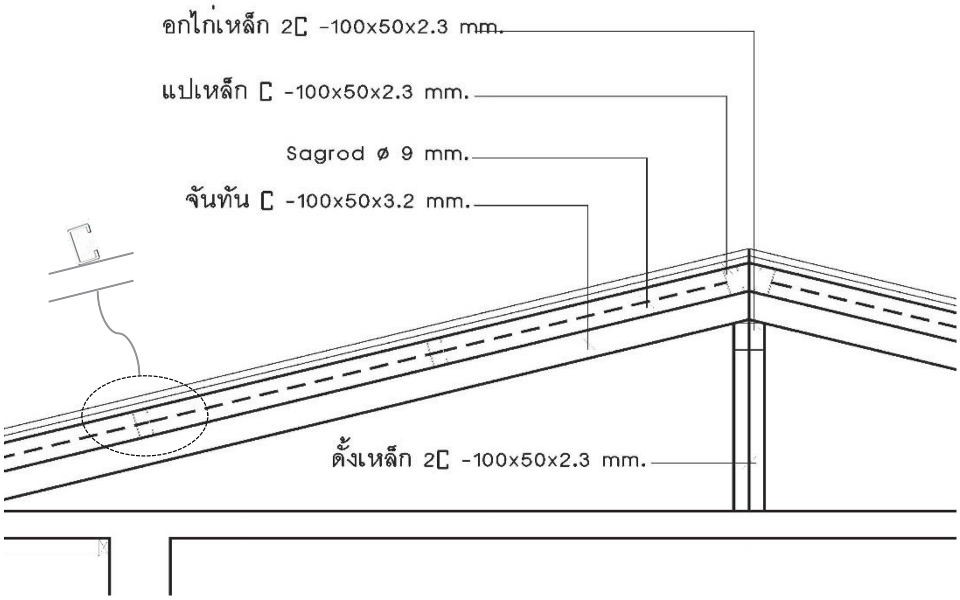
$$F_f = \frac{1}{2} \times b \times \frac{Vb}{h[(h/6)+b]} = \frac{Vb^2}{2h[(h/6)+b]}$$

จากสมดุลของ $Pe = F_f h$ จะได้และ $P = V$

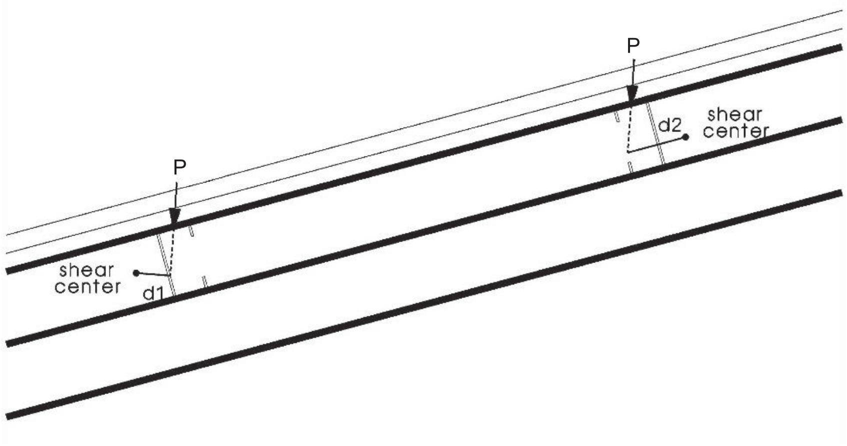
$$e = \frac{F_f h}{V} = \frac{Vb^2 h}{(V)2h[(h/6)+b]}$$

$$e = \frac{b^2}{2[(h/6)+b]}$$

ในระนาบเอียงการพิจารณาจุดศูนย์กลางแรงเฉือนจะช่วยให้โครงสร้างมีเสถียรภาพดีขึ้น การใช้งานเหล็กรูปตัวซีที่นิยมใช้สำหรับงานโครงหลังคาเป็นอีกหนึ่งตัวอย่างที่ต้องพิจารณาในหัวข้อนี้ (รูปที่ 2-22) การประยุกต์ใช้หลักการจุดศูนย์กลางแรงเฉือน ในรูปที่ 2-23 เพื่อลดการบิดของเหล็กที่ใช้เป็นโครงสร้างแปของหลังคาได้ การวางแปตัวซี จึงต้องให้ด้านช่องว่างตัวซีหงายขึ้น เพื่อให้ระยะของแนวแรงใกล้กับจุดศูนย์กลางแรงเฉือนที่สุด แปจึงจะบิดตัวน้อยสุด นั่นคือ $d_1 < d_2$ และ $Pd_1 < Pd_2$ นอกจากนี้การก่อสร้างงานแปจึงเสริมความมั่นคงด้วยการใช้เหล็กยึดแปช่วยให้แปไม่บิดและโก่งตัวมากเกินไป



รูปที่ 2-22 โครงหลังคาทั่วไป



รูปที่ 2-23 การพิจารณาระยะจุดศูนย์กลางแรงเฉือน

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 2

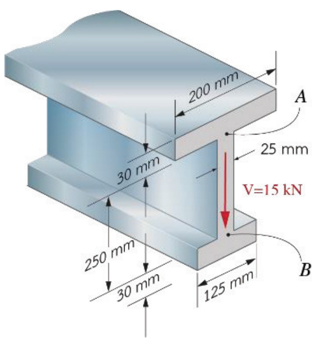
1) ถ้าคานดังรูปถูกกระทำด้วยแรงเฉือน V = 15 kN จงคำนวณหาหน่วยแรงเฉือนในขาตั้งที่ A และ B

2) คานถูกกระทำด้วยแรง P = 7 kN ดังรูป จงคำนวณหาหน่วยแรงเฉือนเฉลี่ยที่เกิดขึ้นในตะปูภายในช่วง AB ของคาน โดยตะปูอยู่บนแต่ละด้านของคาน และมีระยะห่าง 100 mm ตะปูทุกตัวมีเส้นผ่านศูนย์กลาง 5 mm

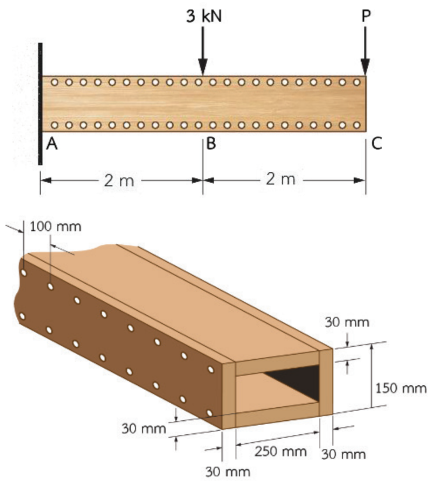
3) แรงเฉือน V = 18 kN กระทำต่อคานรูปกล่องที่สมมาตรดังแสดงในรูป จงคำนวณหาการไหลการเฉือนที่จุด A, B และ C

4) จงคำนวณหาตำแหน่ง e ของศูนย์กลางการเฉือนที่จุด O สำหรับชิ้นส่วนผนังบางที่มีหน้าตัดดังแสดงในรูป เมื่อหน้าตัดมีความหนา 0.25 in.

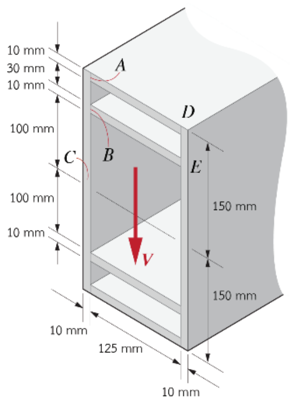
5) จงคำนวณหาตำแหน่ง e ของศูนย์กลางการเฉือนที่จุด O ของชิ้นส่วนผนังบางที่มีหน้าตัดดังแสดงในรูป เมื่อชิ้นส่วนมีความหนา t



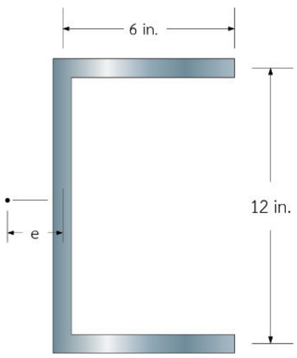
รูปแบบฝึกหัดข้อ 1)



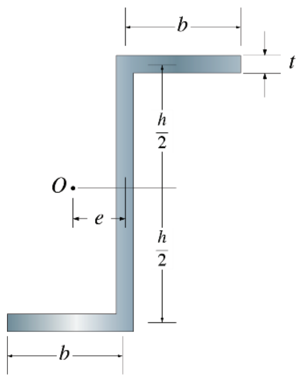
รูปแบบฝึกหัดข้อ 2)



รูปแบบฝึกหัดข้อ 3)



รูปแบบฝึกหัดข้อ 4)



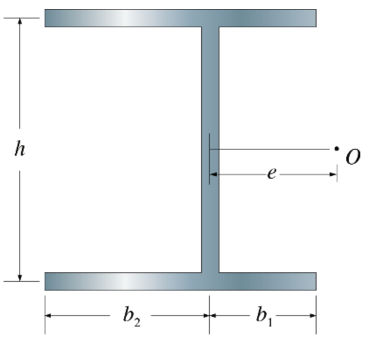
รูปแบบฝึกหัดข้อ 5)

6) จงคำนวณหาตำแหน่ง e ของศูนย์กลางการเฉือนที่จุด O สำหรับชิ้นส่วนผนังบางที่มีหน้าตัดดังแสดงในรูป และ $b_2 > b_1$ และชิ้นส่วนมีความหนา t

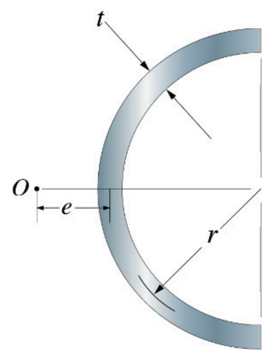
7) จงคำนวณหาตำแหน่ง e ของศูนย์กลางการเฉือนที่จุด O สำหรับชิ้นส่วนผนังบางที่มีหน้าตัดดังแสดงในรูป

8) จงคำนวณหาตำแหน่ง e ของศูนย์กลางการเฉือนที่จุด O สำหรับท่อที่มีรอยฉีกขาดตามแนวความยาว

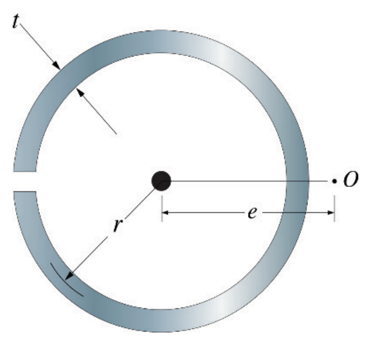
9) จงคำนวณหาตำแหน่ง e ของศูนย์กลางการเฉือนสำหรับท่อผนังบางที่มีหน้าตัดดังแสดงในรูป เมื่อชิ้นส่วนย่อยมีความหนาเท่ากับ t



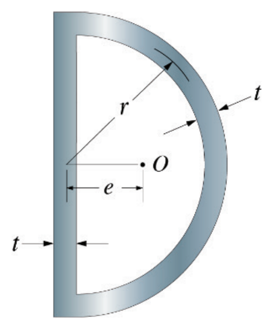
รูปแบบฝึกหัดข้อ 6)



รูปแบบฝึกหัดข้อ 7)



รูปแบบฝึกหัดข้อ 8)



รูปแบบฝึกหัดข้อ 9)

บทที่ 3
โมเมนต์ดัด

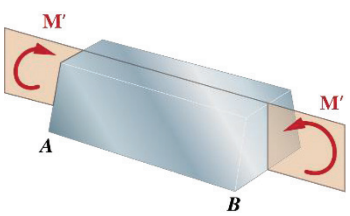
3.1 บทนำ

ในบทที่ผ่านมาเป็นการวิเคราะห์หาค่าความเค้นและความเครียดในชิ้นส่วนโครงสร้างที่มีหน้าตัดคงที่ และรับแรงในแกนต่างๆ และแรงเฉือน ในบทนี้จะทำการวิเคราะห์ชิ้นส่วนโครงสร้างที่มีหน้าตัดคงที่และรับโมเมนต์ $\mathbf{M}$ และ $\mathbf{M'}$ ซึ่งมีขนาดเท่ากันและมีทิศทางตรงกันข้าม กระทำในระนาบเดียวกัน ซึ่งเป็นระนาบที่อยู่ตามแนวความยาวของชิ้นส่วนโครงสร้าง (รูปที่ 3-1) เราเรียกว่าชิ้นส่วนโครงสร้างนี้อยู่ในสภาวะรับ “แรงดัด (bending)”

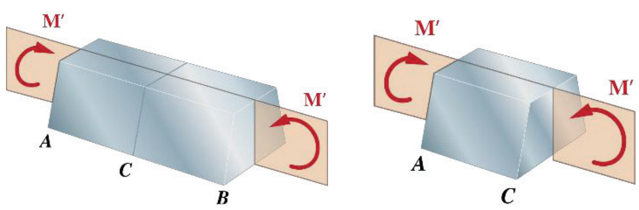
3.2 โมเมนต์ดัดสมมาตร

ชิ้นส่วนโครงสร้างที่รับโมเมนต์ซึ่งมีขนาดเท่ากันและมีทิศทางตรงกันข้าม กระทำอยู่ในระนาบเดียวกันซึ่งเป็นระนาบในแนวตามความยาวนั้น เรียกอยู่ในสภาพรับ “แรงดัดสมมาตร (symmetric bending)” เราจะพบว่าถ้าตัดหน้าตัดผ่านชิ้นส่วน AB ในรูปที่ 3-1 สภาพสมดุลของชิ้นส่วน AC จะทำให้แรงเล็กๆ ที่กระทำบนชิ้นส่วน AC โดยอีกชิ้นส่วนหนึ่งนั้นเทียบเท่ากับโมเมนต์ M (รูปที่ 3-2) ดังนั้นแรงภายในบนหน้าตัดใดๆ ในชิ้นส่วนโครงสร้างที่รับแรงดัดล้วนจะเทียบเท่ากับโมเมนต์บนหน้าตัดนั้นๆ โมเมนต์ M นี้เรียกว่า “โมเมนต์ดัด (bending moment)” บนหน้าตัด เครื่องหมาย M จะเป็นบวกก็ต่อเมื่อชิ้นส่วนโครงสร้างมีการดัดดังในรูปที่ 3-1 และเป็นลบก็ต่อเมื่อ $\mathbf{M}$ และ $\mathbf{M'}$ มีทิศทางตรงกันข้าม

ตัวอย่างของชิ้นส่วนโครงสร้างที่รับแรงดัดคือช่วง BC ของคาน AD ในรูปที่ 3-3(ก) เมื่อตัดหน้าตัดผ่านจุดใดๆ สมมุติว่าเป็นจุด E ซึ่งอยู่ระหว่างจุด B และ C จะเขียนรูปแสดงการสมดุลของช่วง AD และ AE (รูปที่ 3-3(ข) และ (ค)) จะได้ว่าแรงภายในที่กระทำบนหน้าตัดใดๆ ที่อยู่ระหว่างจุด B และ C จะเทียบเท่ากับโมเมนต์ขนาด 36 kN.m

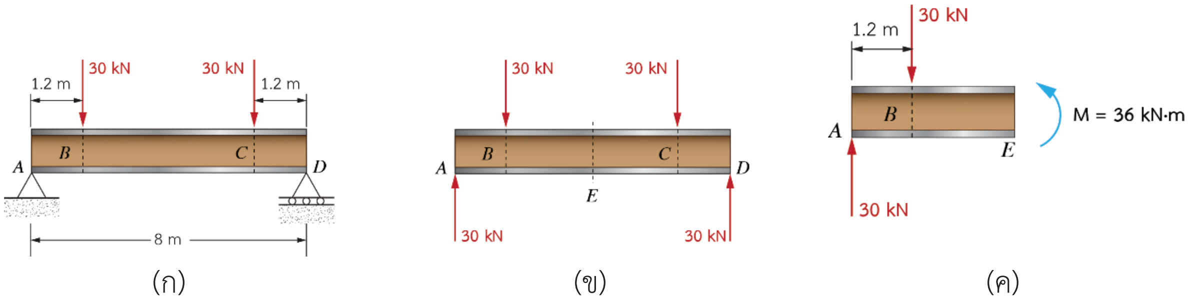


รูปที่ 3-1 ทิศทางของแรงดัด



รูปที่ 3-2 การวิเคราะห์โมเมนต์ดัดเบื้องต้น

โดยวิธีการทางสถิตยศาสตร์เพื่อใช้พิสูจน์สมการที่เป็นจริงสำหรับค่าความเค้นบนหน้าตัดใดๆ ของชิ้นส่วนโครงสร้างที่มีหน้าตัดคงที่และรับแรงดัด ให้ σ_x เป็นความเค้นในแนวตั้งฉากตรงจุดใดๆ บนหน้าตัด และให้ τ_{xy} และ τ_{xz} เป็นองค์ประกอบของความเค้นเฉือน เราจะต้องแสดงให้เห็นว่าระบบของแรงภายในเล็กๆ ที่กระทำบนหน้าตัดนี้เทียบเท่ากับโมเมนต์ M (รูปที่ 3-4)



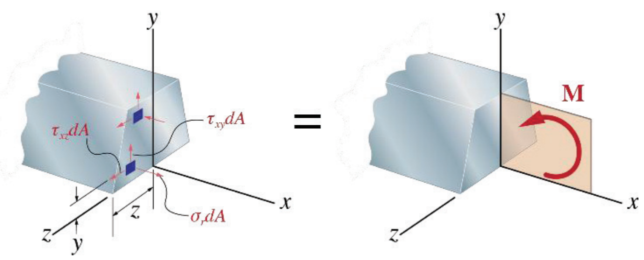
รูปที่ 3-3 การวิเคราะห์โมเมนต์ดัดโดยสมดุลของแรง

เมื่อพิจารณาโมเมนต์ M จะประกอบไปด้วยแรง 2 แรงที่มีขนาดเท่ากันแต่มีทิศทางตรงกันข้าม ดังนั้นผลรวมขององค์ประกอบของแรงเหล่านี้ในทิศทางใดๆ ก็ตามจะต้องมีค่าเท่ากับศูนย์ นอกจากนั้นโมเมนต์จะต้องมีค่าเท่ากันรอบแกนใดๆ ที่ตั้งฉากกับระนาบของโมเมนต์ และจะต้องมีค่าเป็นศูนย์รอบแกนใดๆ ที่อยู่ในระนาบของโมเมนต์ ถ้าเราเลือกแกนใดๆ เช่น แกน z ดังแสดงในรูปที่ 3-4 แรงภายในเล็กๆ จะเทียบเท่ากันกับโมเมนต์ M ได้ก็ต่อเมื่อผลรวมขององค์ประกอบของแรงเล็กๆ มีค่าเท่ากันกับองค์ประกอบของแรงในทิศทางนั้นๆ และผลรวมของโมเมนต์เล็กๆ มีค่าเท่ากันกับโมเมนต์ M

ทิศทางแนวแกน x $\int \sigma_x \, dA = 0$ (3-1)

โมเมนต์รอบแกน y $\int z\sigma_x \, dA = 0$ (3-2)

โมเมนต์รอบแกน z $\int (-y\sigma_x \, dA) = M$ (3-3)



รูปที่ 3-4 ความเค้นและโมเมนต์ดัด

เครื่องหมายลบในสมการที่ (3-3) นั้นเกิดเนื่องจากความเค้นดึง $\sigma_x > 0$ จะทำให้เกิดโมเมนต์ลบ (ตามเข็ม) ของแรงในแนวตั้งฉาก $\sigma_x dA$ รอบแกน z สมการที่ (3-2) อาจไม่เป็นประโยชน์ใดๆ ถ้าชิ้นส่วนโครงสร้างนั้นสมมาตรเทียบกับระนาบที่มีโมเมนต์ M อยู่ และถ้าแกน y อยู่ในระนาบนั้นด้วย ดังแสดงในรูปที่ 3-4 ดังนั้นการกระจายของแรงในแนวตั้งฉากบนหน้าจัดจะสมมาตรรอบแกน y

นอกจากนั้นการกระจายที่แท้จริงของความเค้นบนหน้าตัดเป็นสิ่งที่ไม่สามารถทราบได้โดยใช้หลักการทางสถิตยศาสตร์แต่เพียงอย่างเดียว หรือเรียกได้ว่าเป็นอินดีเทอร์มิเนทในทางสถิตยศาสตร์ ซึ่งเราจะหาได้โดยวิเคราะห์การเสียรูปของชิ้นส่วนโครงสร้าง

ในปัจจุบันมีวัสดุใหม่ๆ ใช้ในงานวิศวกรรมโยธามากขึ้น เช่น คอนกรีตพิเศษ Ultra High Performance Concrete (UHPC) การวิเคราะห์หรือคำนวณเพื่อใช้เป็นชิ้นส่วนโครงสร้าง ใช้หลักการทางทฤษฎีเช่นเดียวกับที่กล่าวข้างต้น โดยใช้กลสมบัติของวัสดุที่ทราบค่าหรือทดสอบในห้องปฏิบัติการในการวิเคราะห์และอาจมีการทดสอบทั้งในห้องปฏิบัติการและทดสอบจริงในขนาดย่อส่วนหรือเท่าขนาดจริงเพื่อยืนยันพฤติกรรม

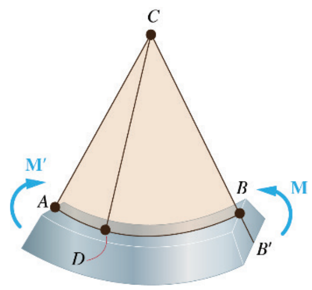
การทดสอบการรับน้ำหนักและโมเมนต์ดัดของแผ่นพื้นผลิตจากคอนกรีต UHPC ที่มีคุณสมบัติพิเศษในการรับกำลังอัดประลัยสูงถึง 160 MPa ในรูปที่ 3-5 เป็นการทดสอบในห้องปฏิบัติการใช้ก้อนอิฐเป็นน้ำหนักบรรทุกแบบแผ่กระจายและมีจุดรองรับแบบคานช่วงเดียว ดังนั้นจึงเกิดโมเมนต์ดัดสูงสุดที่จุดกึ่งกลางตามทฤษฎี ข้อมูลที่ได้ทั้งพฤติกรรมของแผ่นพื้น น้ำหนักบรรทุกสูงสุด และการโก่งตัวนำไปใช้เปรียบเทียบกับมาตรฐาน จากนั้นจึงนำไปใช้ในสถานที่จริงในรูปที่ 3-6 [7]

รูปที่ 3-5 การทดสอบแผ่นพื้น [7]

รูปที่ 3-6 การรับน้ำหนักขณะใช้งาน [7]

3.2.1 การเปลี่ยนแปลงรูปร่างของชิ้นส่วนรับแรงดัด

ในหัวข้อนี้จะวิเคราะห์การเสียรูปของชิ้นส่วนโครงสร้างซึ่งมีระนาบของสมมาตร และรับโมเมนต์ M และ M' ซึ่งมีขนาดเท่ากันและมีทิศทางตรงกันข้ามที่ปลายแต่ละด้าน โดยกระทำในระนาบของการสมมาตร ชิ้นส่วนโครงสร้างจะเกิดการโก่งตัวภายในโมเมนต์ที่มากระทำ แต่จะยังคงสมมาตรเทียบกับระนาบเดิม (รูปที่ 3-7) นอกจากนี้ในเมื่อโมเมนต์ดัด M มีค่าเท่ากันบนทุกหน้าตัด ดังนั้นชิ้นส่วนโครงสร้างจะเกิดการโก่งตัวงออย่างสม่ำเสมอ และทำให้เส้น AB ซึ่งเป็นเส้นที่เกิดจากการตัดกันระหว่างผิวบนของชิ้นส่วนโครงสร้างและระนาบของโมเมนต์นั้นมีความโค้งที่คงที่ หรืออาจกล่าวได้ว่าเส้น AB ซึ่งเดิมเป็นเส้นตรงจะเปลี่ยนไปเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด C และ ก็เป็นเช่นเดียวกันกับเส้น A’ B’ (ไม่ได้แสดงในรูป) ซึ่งเกิดจากการตัดกันของผิวล่างของชิ้นส่วนโครงสร้างและระนาบของสมมาตร นอกจากนี้เรายังจะเห็นได้ว่าเส้น AB จะมีความยาวลดลง เมื่อชิ้นส่วนโครงสร้างมีการโก่งตัวดังแสดงในรูป นั่นคือเมื่อ M > 0 ส่วนเส้น A’ B’ จะยาวขึ้น หรืออาจกล่าวได้ว่าเมื่อ M > 0 ความเครียด ε_x และความเค้น σ_x จะมีค่าเป็นลบสำหรับส่วนที่อยู่ด้านบน (แรงอัด) และมีค่าเป็นบวกสำหรับส่วนที่อยู่ด้านล่าง (แรงดึง)



รูปที่ 3-7 การเปลี่ยนแปลงรูปร่างของชิ้นส่วนรับแรงดัด

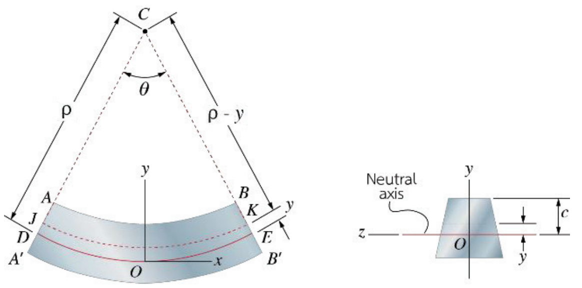
ในชิ้นส่วนโครงสร้างจะมีระนาบอยู่ระนาบหนึ่งซึ่งขนานกับผิวบนและผิวล่าง ซึ่งบนระนาบนั้น ε_x และ σ_x มีค่าเท่ากับศูนย์ ระนาบนี้เรียกว่า “**ระนาบสะเทิน** (neutral surface)” ระนาบสะเทินจะตัดกับระนาบของสมมาตรตามเส้นโค้ง DE (รูปที่ 3-8(ก)) และจะตัดกับหน้าตัดขวางตามเส้นตรงที่เรียกว่า “**แกนสะเทิน** (neutral axis)” ของหน้าตัด (รูปที่ 3-8(ข)) ต่อไปเราจะกำหนดให้จุดเริ่มต้นของแกนพิกัดอยู่บนระนาบสะเทิน และระยะทางที่วัดจากจุดใกล้ๆ ไปยังระนาบสะเทินจะอยู่ในแนวแกน y

ให้ ρ เป็นรัศมีของเส้นโค้ง DE (รูปที่ 3-8(ก)) และให้ θ เป็นมุมที่จุดศูนย์กลางของโค้ง DE และเนื่องจากความยาวของเส้นโค้ง DE จะเท่ากับความยาว L ของชิ้นส่วนโครงสร้างที่ยังไม่มีการเสียรูป ดังนั้นจะได้ว่า

$$L = \rho\theta L \tag{3-4}$$

พิจารณาเส้นโค้ง JK ซึ่งอยู่ที่ระยะ y เหนือจากระนาบสะเทิน จะได้ว่าความยาว L’ คือ

$$L' = (\rho - y)\theta \tag{3-5}$$



(ก) (ข)

รูปที่ 3-8 แกนสะเทินของหน้าตัด

เนื่องจากความยาวเริ่มต้นของเส้นโค้ง JK มีค่าเท่ากับ L ดังนั้นการเสียรูปของเส้นโค้ง JK คือ

$$\delta = L' - L \tag{3-6}$$

หรือแทนค่าจากสมการที่ (3-4) และ (3-5) ลงในสมการที่ (3-6) จะได้

$$\delta = (\rho - y)\theta - \rho\theta = y\theta \tag{3-7}$$

ความเครียดในแนวความยาว ε_x ของชิ้นส่วนบนเส้นโค้ง JK จะได้จากการหาค่าของ δ ด้วยความยาวเริ่มต้น L ของเส้นโค้ง JK นั่นคือ

$$\varepsilon_x = \frac{\delta}{L} = \frac{-y\theta}{\rho\theta}$$

หรือ

$$\varepsilon_x = \frac{y}{\rho} \tag{3-8}$$

เครื่องหมายลบมาจากการที่สมมุติให้โมเมนต์ดัดเป็นบวก ดังนั้นจะทำให้คานโก่งตัวเป็นรูปโค้งหงาย

เนื่องจากระนาบของหน้าตัดขวางจะยังคงเป็นระนาบอยู่เสมอ ทุกระนาบที่ขนานกันกับระนาบของการสมมาตรจึงมีการเสียรูปที่เหมือนกันทั้งหมด ดังนั้นค่าของความเครียดที่ได้จากสมการที่ (3-8) จะเป็นจริงสำหรับทุกๆ จุด และสรุปได้ว่าค่าความเครียดในแนวตั้งฉาก ε_x ซึ่งอยู่ในทิศทางตามแนวความยาว จะแปรผันเป็นเส้นตรง และแปรผันตามระยะ y จากระนาบสะเทิน เหมือนกันทุกๆ จุดบนชิ้นส่วนโครงสร้าง

ค่าความเครียด ε_x จะมีค่าสัมบูรณ์สูงสุดเมื่อ y มีค่ามากที่สุด ให้ c เป็นระยะที่มากที่สุดวัดจากระนาบสะเทิน (ซึ่งหมายถึงผิวบนสุดหรือผิวล่างสุดของชิ้นส่วนโครงสร้าง) และให้ ε_m เป็นค่าสัมบูรณ์สูงสุดของความเครียด จะได้ว่า

$$\varepsilon_x = \frac{c}{\rho} \tag{3-9}$$

แก้สมการที่ (3-8) เพื่อหาค่าของ ρ และแทนค่าที่ได้ลงในสมการที่ (3-8) จะเขียนได้ว่า

$$\varepsilon_x = -\frac{y}{c}\varepsilon_m \tag{3-10}$$

จากการวิเคราะห์ที่ผ่านมานี้ ยังไม่ทำให้เราสามารถคำนวณค่าของความเครียดและความเค้นที่จุดต่างๆ บนชิ้นส่วนโครงสร้างได้ นั่นเป็นเพราะว่าเรายังไม่ได้กำหนดตำแหน่งของระนาบสะเทินในชิ้นส่วนโครงสร้าง ในการที่จะกำหนดตำแหน่งของระนาบสะเทินนั้น เราจะต้องกำหนดความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดของวัสดุที่ใช้เสียก่อน

3.2.2 ความเค้นดัด

ต่อไปนี้เราจะพิจารณาที่โมเมนต์ดัด M ทำให้เกิดความเค้นในแนวตั้งฉาก ซึ่งมีค่าไม่เกินกำลังคลาก σ_Y ของวัสดุ นั่นหมายถึงความเค้นมีค่าต่ำกว่าขีดจำกัดความเป็นปฏิภาค (proportional limit) และขีดจำกัดความยืดหยุ่น (elastic limit) ด้วย ดังนั้นจะไม่มีการเสียรูปอย่างถาวรเกิดขึ้น และสามารถใช้กฎของฮุคได้ สมมุติว่าวัสดุเป็นเนื้อเดียวกันทั้งหมดและให้ E เป็นค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นของวัสดุสำหรับในทิศทางของแกน x จะได้ว่า

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \tag{3-11}$$

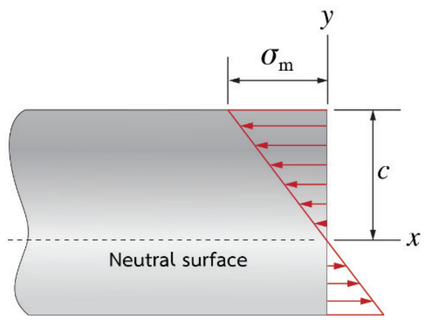
จากสมการที่ (3-10) และคูณทั้ง 2 ข้างของสมการด้วย E จะได้

$$E\varepsilon_x = -\frac{y}{c}\left(E\varepsilon_m\right)$$

หรือใช้สมการที่ (3-11) จะได้

$$\sigma_x = -\frac{y}{c}\sigma_m \tag{3-12}$$

โดยที่ σ_m เป็นค่าสัมบูรณ์สูงสุดของความเค้น ผลที่ได้นี้แสดงให้เห็นว่าความเค้นจะแปรผันเป็นเส้นตรงตามระยะทางจากระนาบสะเทิน (รูปที่ 3-7)



รูปที่ 3-9 การกระจายความเค้นตลอดหน้าตัด

ต่อไปเราจะหาตำแหน่งของระนาบสะเทินและค่าของความเค้นสูงสุด σ_m ซึ่งจะได้จากสมการที่ (3-3) และ (3-3) แทนค่า σ_x จากสมการที่ (3-12) ลงในสมการที่ (3-1) จะได้

$$\int \sigma_x dA = \int\left(-\frac{y}{c}\sigma_m\right)dA = -\frac{\sigma_m}{c}\int y\, dA = 0$$

และจะได้ว่า

$$\int y\, dA = 0 \qquad (3\text{-}13)$$

สมการนี้แสดงให้เห็นว่าโมเมนต์แรกรอบแกนสะเทินของพื้นที่จะต้องมีค่าเท่ากับศูนย์ หรืออาจจะกล่าวได้ว่าสำหรับชิ้นส่วนโครงสร้างที่รับแรงดัดล้วน แกนสะเทินจะผ่านจุดศูนย์ถ่วงของหน้าตัดเสมอ

ต่อไปจากสมการที่ (3-3) ซึ่งได้พิสูจน์ไว้ในหัวข้อที่ 3.2 โดยคิดรอบแกน z นั่นคือ

$$\int(-y\sigma_x\, dA) = M$$

กำหนดให้แกน z ทับกันอยู่กับแกนสะเทินของหน้าตัด แทนค่า σ_x จากสมการที่ (3-12) ลงในสมการที่ (3-3) จะได้

$$\int(-y)\left(-\frac{y}{c}\sigma_m\right) dA = M$$

หรือ

$$\frac{\sigma_m}{c}\int y^2\, dA = M \qquad (3\text{-}14)$$

เนื่องจากในกรณีของแรงดัดล้วน แกนสะเทินจะผ่านจุดศูนย์ถ่วงของหน้าตัด ดังนั้น I ก็คือโมเมนต์เฉื่อยหรือโมเมนต์ที่สองของหน้าตัด โดยเทียบกับแกนศูนย์ถ่วง ซึ่งตั้งฉากกับระนาบของโมเมนต์ M ดังนั้นเมื่อแก้สมการที่ (3-14) เพื่อหาค่าของ σ_m จะได้ว่า

$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} = \frac{M}{(I/C)} \tag{3-15}$$

แทนค่า σ_m จากสมการที่ (3-15) ลงในสมการที่ (3-12) จะได้ค่าความเค้นในแนวตั้งฉาก σ_x ที่ระยะ y ใดๆ จากแกนสะเทิน นั่นคือ

$$\sigma_x = \frac{My}{I} \tag{3-16}$$

สมการที่ (3-15) และ (3-16) เรียกว่า “**สูตรสำหรับแรงดัด** (flexure formula)” และความเค้นในแนวตั้งฉาก σ_x ซึ่งเกิดจากการดัดของชิ้นส่วนโครงสร้างเรียกว่า “**ความเค้นดัด** (flexural stress)” ซึ่งจะเป็นความเค้นอัด $(\sigma_x < 0)$ เหนือแกนสะเทิน $(y > 0)$ เมื่อโมเมนต์ดัด M มีค่าเป็นบวก และจะเป็นความเค้นดึงเมื่อ M มีค่าเป็นลบ

จากสมการที่ (3-15) เราทราบว่าอัตราส่วน I/c จะขึ้นอยู่กับรูปร่างของหน้าตัด อัตราส่วนนี้เรียกว่า “**โมดูลัสของหน้าตัด** (elastic section modulus)” และแทนด้วยสัญลักษณ์ S จะได้ว่า

$$\text{โมดูลัสของหน้าตัด} = S = \frac{I}{c} \tag{3-17}$$

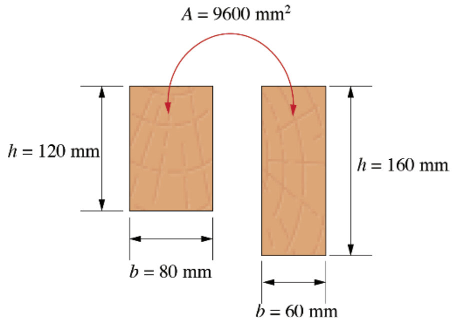
แทนค่า S สำหรับ I/c ในสมการที่ (3-15) จะได้สมการอีกแบบหนึ่ง คือ

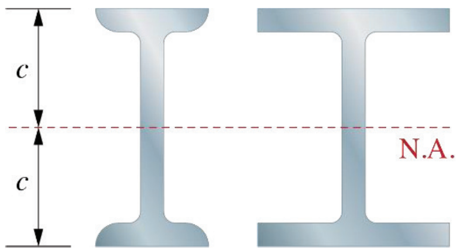
$$\sigma_m = \frac{M}{S} \tag{3-18}$$

เนื่องจากความเค้นสูงสุด σ_m จะแปรผกผันกับค่าโมดูลัสของหน้าตัด S ดังนั้นเราควรจะออกแบบคานให้มีค่า S มากที่สุดเท่าที่จะทำได้ ตัวอย่าง เช่น ในกรณีของคานไม้ซึ่งมีหน้าตัดเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่งมีความกว้างเท่ากับ b และมีความลึกเท่ากับ h จะได้ว่า

$$S = \frac{I}{c} = \frac{\frac{1}{2}bh^3}{h/2} = \frac{1}{6}bh^2 = \frac{1}{6}Ah \tag{3-19}$$

โดยที่ A เป็นพื้นที่หน้าตัดของคาน จะเห็นได้ว่าคาน 2 คาน ซึ่งมีพื้นที่หน้าตัด A เท่ากัน (รูปที่ 3-10) คานที่มีความลึก h มากกว่าจะมีค่าโมดูลัสของหน้าตัดมากกว่า ดังนั้นจะมีประสิทธิภาพในการต้านทานแรงดัดได้ดีกว่า





(ก) S-beam (ข) W-beam

รูปที่ 3-10 การเปรียบเทียบโมดูลัสของหน้าตัด

รูปที่ 3-11 หน้าตัดคานเหล็กรูปพรรณ

ในกรณีของเหล็กโครงสร้าง เรามักจะนิยมใช้คานรูปตัว I (american standard beams, s-beams) และคานรูปตัว I ปีกกว้าง (wide-flange beams, w-beams) มากกว่ารูปร่างอื่นๆ เพราะว่าพื้นที่ส่วนใหญ่ของหน้าตัดอยู่ในตำแหน่งที่ห่างจากแกนสะเทิน (รูปที่ 3-11) ดังนั้นสำหรับพื้นที่หน้าตัดและความลึกที่กำหนดให้รูปร่างเหล่านี้จะมีค่า I และค่า S สูง ค่าโมดูลัสของหน้าตัดคานที่ผลิตสำเร็จรูปจะได้จากตารางคุณสมบัติของหน้าตัด ในการหาค่าความเค้นสูงสุด σ_m ในหน้าตัดของคานมาตรฐานวิศวกรจะต้องอ่านค่าโมดูลัสของหน้าตัด S จากตาราง แล้วจึงหารค่าของโมเมนต์ดัด M ด้วย S

ค่าการเสียรูปที่เกิดจากโมเมนต์ดัด M จะวัดได้จาก “**ความโค้ง** (curvature)” ของระนาบสะเทิน ความโค้งจะเป็นส่วนกลับของรัศมีโค้ง ρ (radius of curvature) และจะได้จากการแก้สมการที่ (3-11) เพื่อหาค่าของ $1/\rho$ นั่นคือ

$$1/\rho = \frac{\varepsilon_m}{c} \tag{3-20}$$

แต่ในช่วงพฤติกรรมที่เป็นอีลาสติก เรามีสมการ $\varepsilon_m = \sigma_m/E$ แทนค่า ε_m ลงในสมการที่ (3-20) และนำสมการที่ (3-15) มาใช้ จะได้ว่า

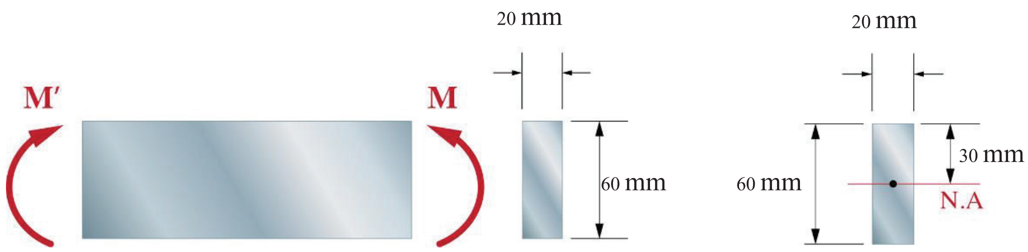
$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sigma_m}{Ec} = \frac{1}{Ec}\frac{Mc}{1}$$

หรือ

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \tag{3-21}$$

<u>ตัวอย่างที่ 3.1</u>

แท่งเหล็กหน้าตัดเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด 20 × 60 mm รับโมเมนต์ดัด ซึ่งมีขนาดเท่ากันและมีทิศทางตรงกันข้าม กระทำในระนาบสมมาตรในแนวดิ่ง (รูปตัวอย่างที่ 3.1) จงหาค่าของโมเมนต์ดัด M ที่ทำให้แท่งเหล็กเกิดการคลาก โดยสมมุติว่า σ_y = 250 MPa



รูปตัวอย่างที่ 3.1

เนื่องจากแกนสะเทินจะต้องผ่านจุดเซนทรอยด์ C ของหน้าตัด จะได้ว่า c = 30 mm = 30 ×10^{-3} m (รูปตัวอย่างที่ 3.1) หรือโมเมนต์เฉื่อยรอบแกนเซนทรอยด์ของหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าคือ

$$I = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12}\left(20\times10^{-3}\text{ m}\right)\left(60\times10^{-3}\text{ m}\right)^3 = 360\times10^{-9}\text{ m}^4$$

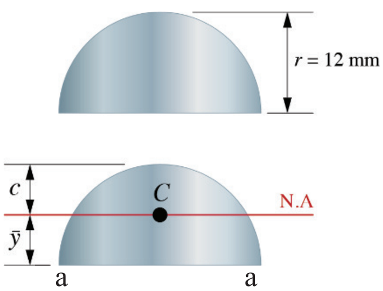
แก้สมการที่ (3.15) เพื่อหาค่าของ M และแทนค่าตัวเลขที่กำหนดให้ลงในสมการ จะได้

$$M = \frac{I}{c}\sigma_m = \frac{360\times10^{-9}\text{ m}^4}{30\times10^{-3}\text{ m}}\left(250\times10^{6}\text{ N/m}^2\right)$$

$$M = 3000\text{ N}\cdot\text{m} = 3\text{ kN}\cdot\text{m}$$

<u>ตัวอย่างที่ 3.2</u>

แท่งอะลูมิเนียมซึ่งมีหน้าตัดเป็นรูปครึ่งวงกลม มีรัศมี r = 12 mm (รูปตัวอย่างที่ 3.2) ถูกดัดเป็นโค้งมีรัศมี ρ = 2.5 m กำหนดให้ด้านที่แบน (a - a) ของแท่งอะลูมิเนียมหมุนเข้าหาจุดศูนย์กลางของโค้ง จงหาความเค้นดึงและความเค้นอัดสูงสุดที่เกิดขึ้น กำหนดให้ E = 70 GPa



รูปตัวอย่างที่ 3.2

เราสามารถที่จะใช้สมการที่ (3.21) ในการหาค่าของโมเมนต์ดัด M ที่ทำให้เกิดรัศมีโค้ง ρ และใช้สมการที่ (3.15) เพื่อหาค่าของ σ_m ได้ อย่างไรก็ตามจะง่ายกว่าถ้าใช้สมการที่ (3.9) ในการหาค่าของ ε_m แล้วใช้กฎของฮุคเพื่อหาค่าของ σ_m

ตำแหน่ง $\bar{y}$ ของจุดเซนทรอยด์ C ของหน้าตัดรูปครึ่งวงกลมคือ

$$\bar{y} = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4(12\text{ mm})}{3\pi} = 5.093\text{ mm}$$

แกนสะเทินจะผ่านจุด C (รูปตัวอย่างที่ 3.2) และระยะ c ไปยังจุดบนหน้าตัดที่อยู่ไกลจากแกนสะเทินมากที่สุดคือ

$$c = r - \bar{y} = 12\text{mm} - 5.093\text{ mm} = 6.907\text{ mm}$$

จากสมการที่ (3-9) จะได้ว่า

$$\varepsilon_m = \frac{c}{\rho} = \frac{6.907 \times 10^{-3}}{2.5\text{m}} = 2.763 \times 10^{-3}$$

และใช้กฎของฮุคจะได้ว่า

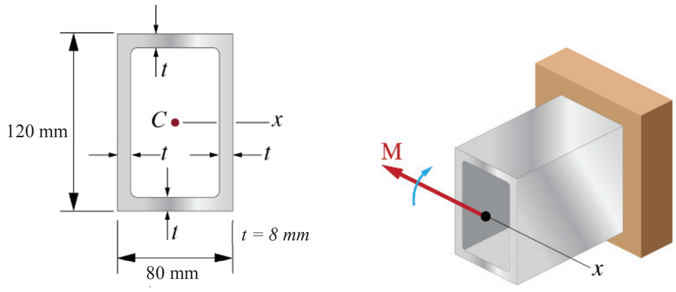
$$\sigma_m = E\varepsilon_m = \left(70 \times 10^9\text{ Pa}\right)\left(2.763 \times 10^{-3}\right) = 193.4\text{ MPa}$$

เนื่องจากด้านนี้ของแท่งอะลูมิเนียมหันออกไปจากจุดศูนย์กลางความโค้ง ดังนั้นความเค้นที่ได้จึงเป็นความเค้นดึง ค่าความเค้นอัดสูงสุดจะเกิดขึ้นบนด้านที่แบน เนื่องจากความเค้นจะแปรผันตามระยะจากแกนสะเทิน ดังนั้น

$$\sigma_{comp} = -\frac{\bar{y}}{c}\sigma_m = \frac{5.093\text{ mm}}{6.907\text{ mm}}\left(193.4\text{ MPa}\right) = -142.6\text{ MPa}$$

ตัวอย่างที่ 3.3

ท่อสี่เหลี่ยมผืนผ้าดังแสดงในรูปทำจากอะลูมิเนียมผสมซึ่งมีค่า σ_Y = 150 MPa, σ_U = 300 MPa และ E = 70 GPa จงหา (a) ค่าโมเมนต์ดัด M ที่จะทำให้สัดส่วนความปลอดภัยมีค่าเท่ากับ 3.00 (b) รัศมีความโค้งของท่อ

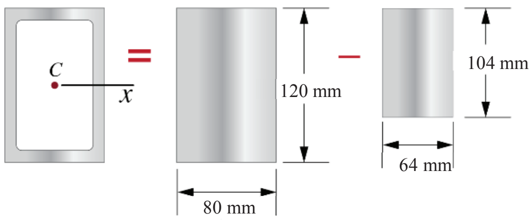


รูปตัวอย่างที่ 3.3 (ก)

โมเมนต์เฉื่อย คำนวณพื้นที่หน้าตัดของท่อจากผลต่างระหว่างพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าทั้ง 2 รูป และใช้สูตรสำหรับโมเมนต์เฉื่อยรอบแกนเซนทรอยด์ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า จะได้ว่า

$$I = \frac{1}{12}(0.080)(0.120)^3 - \frac{1}{2}(0.064)(0.104)^3$$

$$I = 5.52\times10^{6}\ \text{m}^4$$

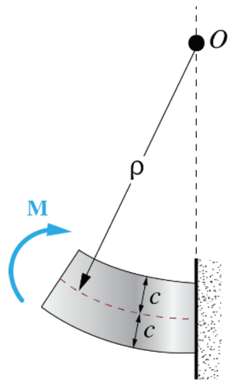


รูปตัวอย่างที่ 3.3 (ข)

ความเค้นที่ยอมให้ สำหรับค่าสัดส่วนความปลอดภัยเท่ากับ 3.00 และค่าความเค้นประลัยเท่ากับ 300 MPa จะได้ว่า

$$\sigma_{all} = \frac{\sigma_U}{F.S} = \frac{300\ \text{MPa}}{3.00} = 100\ \text{MPa}$$

เนื่องจาก $\sigma_{all} < \sigma_Y$ ท่อจะมีพฤติกรรมอยู่ในช่วงอีลาสติก



รูปตัวอย่างที่ 3.3(ค)

โมเมนต์ดัด เมื่อ $c = \frac{1}{2}(0.120\text{ m}) = 0.060\text{ m}$ จะได้ว่า

$$\sigma_{all} = \frac{Mc}{I}$$

$$M = \frac{I}{c}\sigma_{all} = \frac{5.52\times10^{-6}\text{ m}^4}{0.060\text{ m}}\times100\text{ MPa}$$

$$M = 9.20\text{ kN}\cdot\text{m}$$

รัศมีของโค้ง เนื่องจาก $E = 70\text{ GPa}$ แทนค่านี้ และค่าของ I และ M ที่ได้ลงในสมการที่ (3-21) จะได้ว่า

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} = \frac{9.20\text{ kN}\cdot\text{m}}{(70\text{ GPa})(5.52\times10^{-6}\text{ m}^4)}$$

$$= 23.8\times10^{-3}\text{ m}^{-1}$$

$$\rho = 42.0\text{ m}$$

วิธีทำแบบอื่น เนื่องจากเราทราบแล้วว่าค่าความเค้นสูงสุดคือ $\sigma_{all} = 100\text{ MPa}$ ดังนั้นจะหาค่าของความเครียดสูงสุด ε_m ได้ และใช้สมการที่ (3-9)

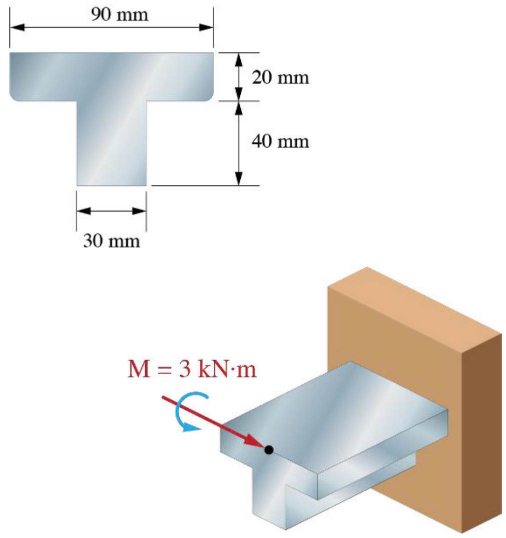
$$\varepsilon_m = \frac{\sigma_{all}}{E} = \frac{100\text{ MPa}}{70\text{ GPa}} = 1429\ \mu$$

$$\varepsilon_m = \frac{c}{\rho};\ \rho = \frac{c}{\varepsilon_m} = \frac{0.060\text{ m}}{1429\ \mu}$$

$$\rho = 42.0\text{ m}$$

<u>**ตัวอย่างที่ 3.4**</u>

ชิ้นส่วนเหล็กหล่อรับโมเมนต์ขนาด 3 kN.m ดังแสดงในรูปกำหนดให้ E = 165 GPa จงหา (a) ค่าความเค้นดึงและความเค้นอัดสูงสุดที่เกิดขึ้น (b) รัศมีความโค้งของชิ้นส่วนเหล็กหล่อนี้



รูปตัวอย่างที่ 3.4 (ก)

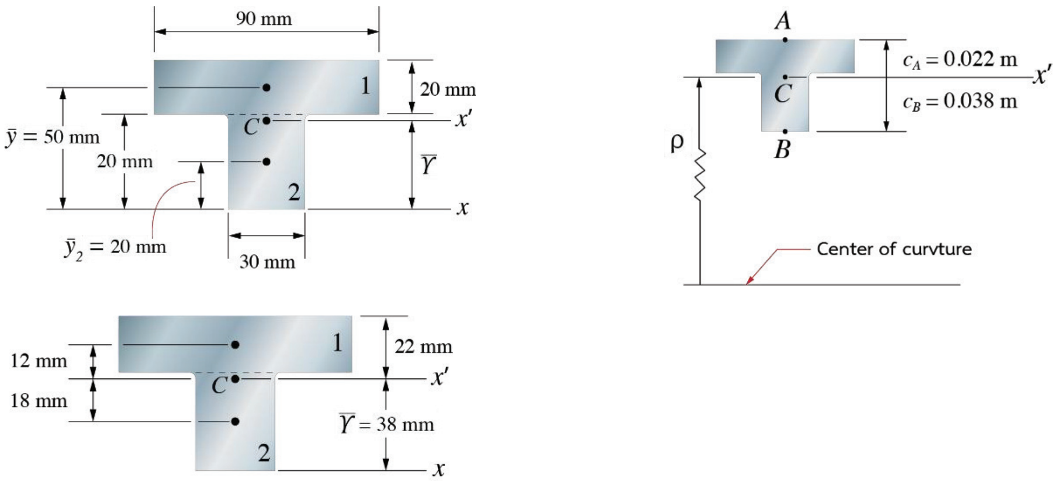
จุดเซนทรอยด์ แบ่งพื้นที่รูปตัว T ออกเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า 2 รูป ได้ว่า

	พื้นที่, mm^2	$\bar{y}$, mm	$\bar{y}$ A, mm^3
1	$(20)(90)=1800$	50	90×10^3
2	$(40)(30)=1200$ $\sum A=3000$	20	24×10^3 $\sum \bar{y}A=114\times10^3$

$$\bar{Y}\sum A=\sum \bar{y}A$$

$$\bar{Y}(3000)=114\times10^6$$

$$\bar{Y}=38\text{ mm}$$



รูปตัวอย่างที่ 3.4 (ข)

โมเมนต์เฉื่อยรอบแกนเซนทรอยด์ เราจะใช้ทฤษฎีการย้ายแกนเพื่อที่จะหาโมเมนต์เฉื่อยของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแต่ละรูปรอบแกน x' ซึ่งผ่านจุดเซนทรอยด์ของหน้าตัดทั้งหมด แล้วรวมค่าโมเมนต์เฉื่อยของสี่เหลี่ยมผืนผ้าทั้ง 2 รูปเข้าด้วยกัน

$$I_{x'} = \sum\left(\bar{I} + Ad^2\right) = \sum\left(\frac{1}{12}bh^3 + Ad^2\right)$$

$$= \frac{1}{12}(90)(20)^3 + (90\times 20)(12)^2 + \frac{1}{12}(30)(40)^3 + (30\times 40)(18)^2$$

$$= 868\times 10^3 \text{ mm}^4$$

$$= 868\times 10^{-9} \text{ m}^4$$

ความเค้นดึงสูงสุด เนื่องจากโมเมนต์ดัดที่มากระทำนี้ทำให้ชิ้นส่วนโก่งตัวขึ้น ดังนั้นจุดศูนย์กลางของโค้งจึงอยู่ใต้หน้าตัดความเค้นดึงสูงสุดจะเกิดขึ้นที่จุด A ซึ่งอยู่ที่ระยะห่างจากจุดศูนย์กลางของโค้งมากที่สุด

$$\sigma_A = \frac{Mc_A}{I}$$

$$= \frac{(3 \text{ kN}\times\text{m})(0.022 \text{ m})}{868\times 10^{-9} \text{ m}^4}$$

$$\sigma_A = +76.0 \text{ MPa}$$

ความเค้นอัดสูงสุด เกิดขึ้นที่จุด B นั่นคือ

$$\sigma_B = \frac{Mc_B}{I}$$

$$= \frac{(3 \text{ kN}\times\text{m})(0.038 \text{ m})}{868\times 10^{-9} \text{ m}^4}$$

$$\sigma_B = -131.3 \text{ MPa}$$

รัศมีของโค้ง จากสมการที่ (3.21) จะได้ว่า

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

$$= \frac{3 \text{ kN}\cdot\text{m}}{(165 \text{ GPa})(868\times 10^{-9} \text{ m}^4)}$$

$$= 20.95\times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$$

$$\rho = 47.7 \text{ m}$$

3.3 โมเมนต์ดัดไม่สมมาตร

จากสมการของหน่วยแรงดัด $\sigma = \frac{My}{I}$ มีเงื่อนไขที่ว่า พื้นที่หน้าตัดจะต้องสมมาตรรอบแกนที่ตั้งฉากกับแกนสะเทิน นอกจากนั้น โมเมนต์ลัพธ์ภายใน M กระทำตามแนวแกนสะเทิน ดังกรณีของหน้าตัดรูปตัว T หรือรูปร่างดังแสดงในรูปที่ 3-12 และในหัวข้อนี้จะแสดงการประยุกต์ใช้สมการการดัดกับคานที่มีหน้าตัดรูปทรงใดๆ หรือคานที่มีโมเมนดัดลัพธ์ภายในกระทำทิศทางใดๆ

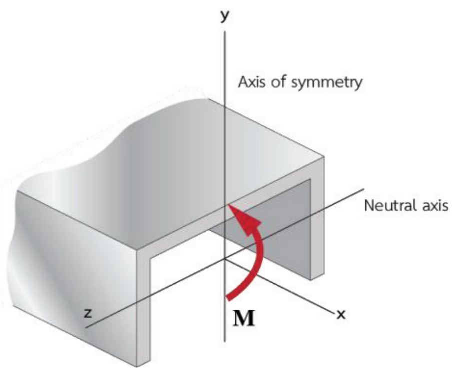
โมเมนต์กระทำตามแนวแกนหลัก (moment applied along principle axis) เมื่อพิจารณาหน้าตัดของคานที่มีรูปร่างไม่สมมาตรดังแสดงในรูปที่ 3-13(ก) จะสมมุติว่าคานมีลักษณะเป็นแนวตรงและเป็นแท่ง ระบบพิกัดฉากกำหนดโดยกฎมือขวา x, y, z ถูกจัดตั้งขึ้นโดยจุดเริ่มต้นอยู่ที่เซนทรอยด์ C ของหน้าตัด และโมเมนต์ลัพธ์ภายใน M กระทำตามแนวแกน +z ต้องกระจายหน่วยแรงให้กระทำบนพื้นที่หน้าตัดทั้งหมดที่มีค่าแรงลัพธ์เป็นศูนย์ โมเมนต์ดัดลัพธ์ภายในรอบแกน +y เป็นศูนย์และโมเมนต์ดัดแกนรอบ z มีค่าเท่ากับ M เงื่อนไขสามดังกล่าวนี้สามารถแสดงในรูปคณิตศาสตร์ โดยพิจารณาแรงกระทำต่อชิ้นส่วนเล็กๆ dA อยู่ที่ (o, y, z) แสดงในรูปที่ 3-13(ก) คือ dF = σdA ดังนั้นจะได้

$$F_R = \sum F_X \; ; \qquad 0 = \int_A \sigma dA \tag{3-22}$$

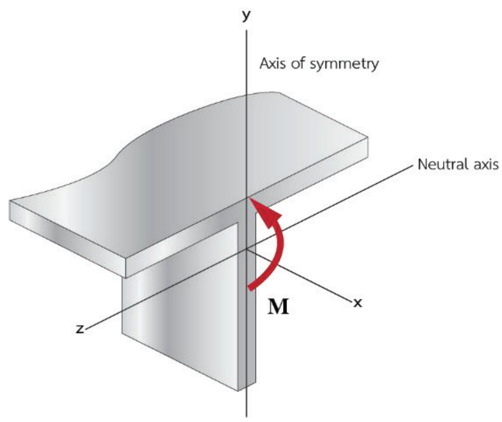
$$(M_R)_y = \sum M_y \; ; \; 0 = \int_A z\sigma dA \tag{3-23}$$

$$(M_R)_Z = \sum M_Z \; ; \qquad F = \int_A -y\sigma dA$$

(3-24)



(ก)



(ข)

รูปที่ 3-12 คานที่ถูกกระทำด้วยโมเมนต์ดัดแบบสมมาตร

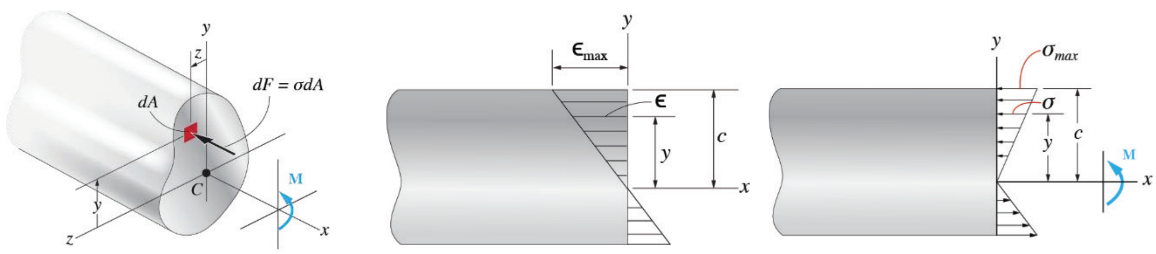
ตามสมการที่ 3-22 นั้น เนื่องจากแกน z ผ่านจุดเซนทรอยด์ของพื้นที่หน้าตัด นอกจากนั้น เมื่อแกน z ได้เป็นแกนสะเทินของหน้าตัดด้วย ความเครียดจะแปรค่าเชิงเส้นจากศูนย์ที่แกนสะเทินไปยังค่ามากที่สุดที่จุดที่มีระยะพิกัด $y = c$ เป็นระยะที่มากที่สุดวัดจากแกนสะเทิน ดังแสดงในรูปที่ 3-13(ข) พฤติกรรมของวัสดุมีลักษณะยืดหยุ่นเชิงเส้น การกระจายหน่วยแรงตั้งฉากปกติบนพื้นที่หน้าตัดเป็นแบบเชิงเส้นดังแสดงนั้น $\sigma = -(y/c)\sigma_{max}$ ดังรูปที่ 3-13(ค) เมื่อสมการนี้ถูกแทนค่าในสมการที่ 3-24 และทำการอินทิเกรต ซึ่งนำไปสู่สมการการดัด $\sigma_{max} = Mc/I$ เมื่อนำสมการ $\sigma = -(y/c)\sigma_{max}$ แทนที่ในสมการที่ 3-23 จะได้ว่า

$$0 = \frac{-\sigma_{max}}{c}\int_A yz\,dA$$

ซึ่งจะได้

$$\int_A yz\,dA = 0$$

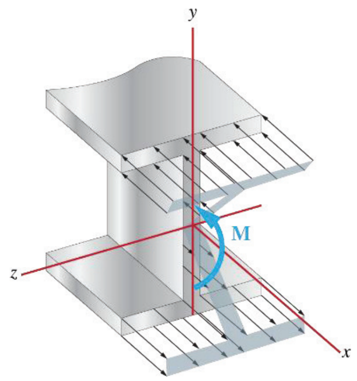
ผลการอินทีกัลถูกเรียกว่า ผลคูณของโมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่ (product of inertia for the area) จะเป็นศูนย์ แกน y และ z ถูกเลือกให้เป็นแกนหลักของความเฉื่อยของพื้นที่รูปทรงใดๆ ดังรูปที่ 3-13(ก) ทิศทางของแกนหลักจะทราบโดยใช้สมการเปลี่ยนแปลงของความเฉื่อยหรือจากทฤษฎีวงกลมมอห์ ถ้าพื้นหน้าตัดที่มีแกนสมมาตร อย่างไรก็ตาม แกนหลักจะจัดตั้งขึ้นง่าย เนื่องจากมีทิศทางตามแนวแกนสมมาตรและตั้งฉากกัน



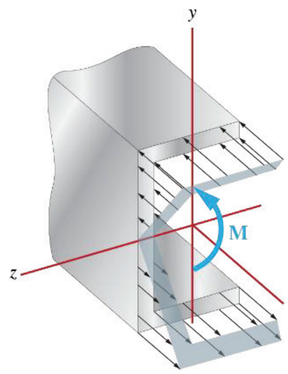
(ก) (ข) (ค)

รูปที่ 3-13 การวิเคราะห์คานที่ถูกกระทำด้วยโมเมนต์ดัดแบบสมมาตร

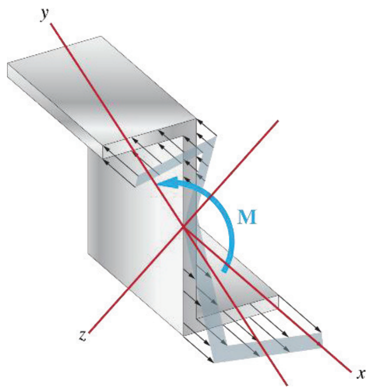
โดยสรุปแล้ว สมการที่ 3-22 ถึง 3-23 จะเป็นไปตามที่โมเมนต์กระทำรอบแกนหลักที่จุดเซนทรอยด์ของโมเมนต์ความเฉื่อย เช่น ชิ้นส่วนในรูปที่ 3-14 ซึ่งถูกกระทำด้วยโมเมนต์ดัด M ในแต่ละกรณีที่แทน y และ z นิยามให้เป็นแกนหลักโมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่หน้าตัดที่มีจุดเริ่มต้นอยู่ที่เซนทรอยด์ของพื้นที่ ในรูปที่ 3-14(ก) และ (ข) แกนหลักจะมีความสมมาตร ส่วนในรูปที่ 3-14 (ค) และ (ง) ทิศทางของแกนดังกล่าวนี้จะทราบได้โดยการใช้สมการการดัด $\sigma_{max} = My/I$ และแสดงผลลัพธ์สำหรับแต่ละกรณี



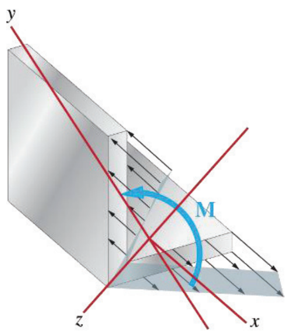
(ก)



(ข)



(ค)

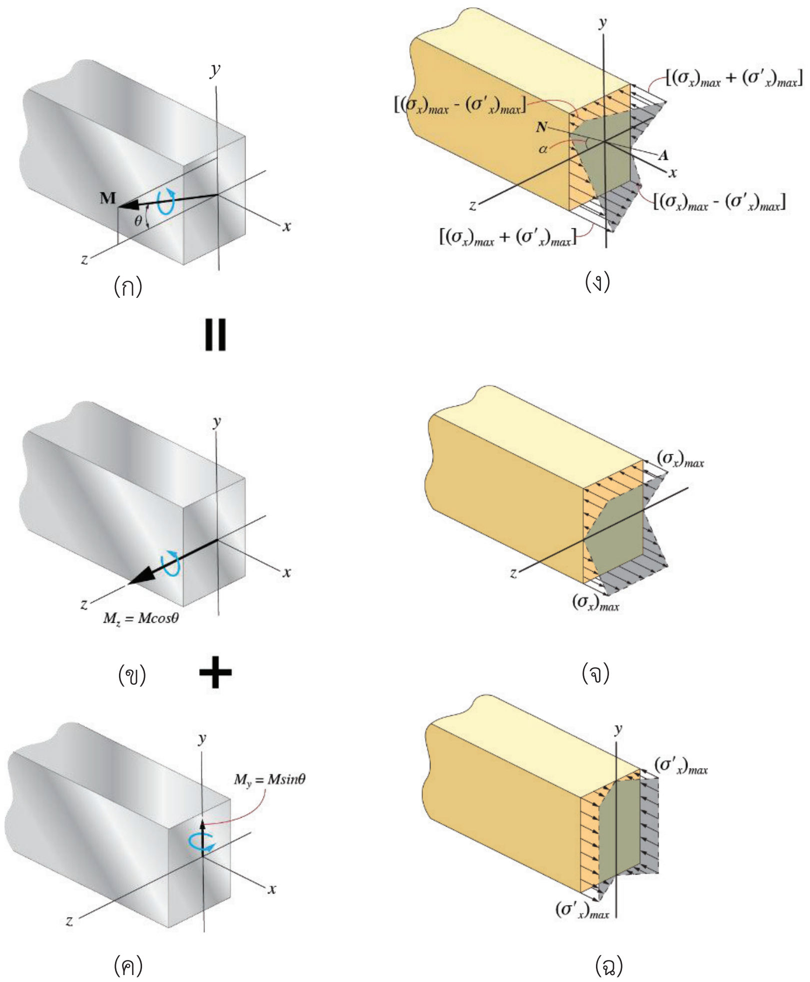


(ง)

รูปที่ 3-14 โมเมนต์กระทำรอบแกนหลักที่จุดเซนทรอยด์ของโมเมนต์ความเฉื่อย

การกำหนดทิศทางของโมเมนต์ดัดที่กระทำ (moment arbitrarily applied) ในกรณีที่ชิ้นส่วนถูกกระทำด้วยโมเมนต์ดัดลัพธ์ภายในที่ไม่กระทำรอบแกนของหน้าตัดเมื่อเหตุการณ์นั้นเกิดขึ้น โมเมนต์ดัดเริ่มแรกจะถูกแบ่งออกเป็นแรงย่อยในทิศทางตามแนวแกนหลักสมการการดัดสามารถใช้หาหน่วยแรงตั้งฉากปกติที่เกิดขึ้นในแต่ละแนวย่อยโมเมนต์ดัด ท้ายสุดจะใช้หลักการของการซ้อนทับ (superposition) หาหน่วยแรงตั้งฉากปกติลัพธ์ที่จุดที่ต้องการทราบค่า

เมื่อพิจารณาคานที่มีรูปหน้าตัดสี่เหลี่ยมผืนผ้าและถูกกระทำด้วยโมเมนต์ดัด M ซึ่งแสดงในรูปที่ 3-15(ก) โดยกฎมือขวา M ถูกแทนที่ด้วยเวกเตอร์ที่ทำมุม θ กับแกนหลัก z โดยเฉพาะอย่างยิ่ง θ มีค่าเป็น + เมื่อมีทิศทางจากแกน +z ไปยังแกน +y แยกแสดงรูปให้เป็นอิสระต่อกันบนหน้าตัดในรูปที่ 3-15(ข) และ (ค) การกระจายหน่วยแรงตั้งฉากปกติเกิดจาก M และโมเมนต์ดัดตามแกน M_Z และ M_y ดังแสดง ในรูปที่ 3-15(ง), (จ) และ (ฉ) ตามลำดับ เมื่อสมมุติให้ $(\sigma_x)_{max} > (\sigma'_y)_{max}$ โดยการตรวจสอบหน่วยแรงดึงและแรงอัดที่มากที่สุดที่เกิดขึ้นที่มุมทั้งสองจุด ที่อยู่ตรงกันข้ามของคานดังแสดงในรูปที่ 3-15(ข) และ (ค) แสดงหน่วยแรงตั้งฉากปกติลัพธ์ที่จุดใดๆ บนหน้าตัด ดังแสดงในรูปที่ 3-15(ง) ในรูปทั่วไปตามสมการที่ 3-25



รูปที่ 3-15 คานที่มีหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าและถูกกระทำด้วยโมเมนต์ดัด M

ความสำคัญอยู่ที่แกน x, y, z จากกฎมือขวาและเครื่องหมายที่เหมาะสมที่ให้กับแรงย่อย โมเมนต์ดัดและพิกัดเมื่อใช้สมการที่ 3-25 หน่วยแรงลัพธ์จะเป็นหน่วยแรงดึงถ้ามีค่าเป็นบวกและเป็นหน่วยแรงอัดถ้ามีค่าเป็นลบ

$$\sigma = -\frac{M_z y}{I_Z} + \frac{M_y z}{I_y} \tag{3-25}$$

เมื่อ

σ = หน่วยแรงตั้งฉากปกติที่จุที่ต้องการทราบค่า

y, z = พิกัดจุดที่พิจารณาวัดจากแกน x, y, z มีจุเริ่มต้นอยู่ที่เซนทรอยต์ของพื้นที่หน้าตัดและรูปแบบของระบบพิกัดฉากโดยใช้กฎมือขวาแกน x มีทิศทางพุ่งขึ้นจากหน้าตัด และแกน y และแกน z แทนแกนหลักค่าที่น้อยที่สุดและมากที่สุดของโมเมนต์ของความเฉื่อยของพื้นที่ ตามลำดับ

M_y, M_z = โมเมนต์ดัดลัพธ์ภายในมีทิศทางตามแนวแกนหลัก y และ z ซึ่งมีค่าบวกถ้ามีทิศทางตามแนวแกน หรือพูดอีกนัยหนึ่งว่า M_y = Msinθ และ M_z = M cosθ เมื่อ θ วัดเป็นค่าบวกจากแกน +z พุ่งไปยังแกน +y

I_y , I_x = โมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่หน้าตัดคำนวณรอบแกน y และ แกน z

ทิศทางของแกนสะเทิน (orientation of the neutral axis) มุม α ของแกนสะเทินในรูปที่ 3-15(ง) สามารถหาได้โดยสมการที่ 3-25 เมื่อ $\alpha = 0$ เนื่องจากไม่มีหน่วยแรงตั้งฉากปกติกระทำที่แกนสะเทิน

$$y = \frac{M_y I_z}{M_z I_y} z$$

เนื่องจาก $M_z = M\cos\theta$ และ $M_y = M\sin\theta$

$$y = \left(\frac{I_z}{I_y}\tan\theta\right) z \tag{3-26}$$

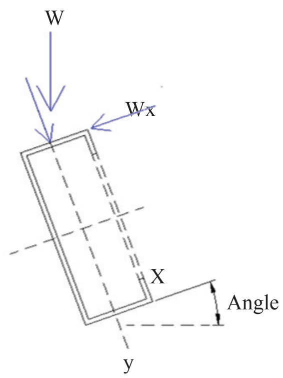
สมการนี้เป็นแนวเส้นนี้มีนิยามของแกนสะเทินสำหรับหน้าตัดดังแสดงในรูปที่ 3-15(ง) เนื่องจากเทอมในวงเล็บแทนความชันของแนวเส้นนี้ $(\tan\alpha = y/z)$

$$\tan\alpha = \left(\frac{I_z}{I_y}\tan\theta\right) \tag{3-27}$$

พบว่าโมเมนต์ดัดที่ไม่สมมาตรมุม θ ทิศทางของโมเมนต์ดัด M ดังแสดงในรูปที่ 3-15(ก) ซึ่งไม่เท่ากับ α มุมถูกนิยามเป็นการเอียงของแกนสะเทิน ดังแสดงในรูปที่ 3.15(ง) เว้นเสียแต่ $I_z = I_y$ ถ้าแกนถูกเลือกเป็นแกนหลักสำหรับโมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่ที่มีค่าน้อยที่สุด และแกนถูกเลือกเป็นแกนหลักสำหรับโมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่ที่มีค่ามากที่สุด ดังนั้น $I_z < I_y$ ดังแสดงในรูปที่ 3-15(ก) และจากสมการที่ 3-27 สามารถสรุปได้ว่ามุมที่วัดเป็นค่าบวกจากแกน +z ไปยัง +y จะอยู่ระหว่างแนวเส้นของการกระทำของ M และแกน +y ดังแสดงในรูปที่ 3-15(จ) อย่าลืมว่า $\theta \le \alpha \le 90^\circ$

ตัวอย่างของโมเมนต์ที่กระทำทั้งสองแกนคือการวางแปเหล็กรูปกล่องบนโครงหลังคา น้ำหนักที่กระทำต่อแปในแนวดิ่ง (W) สามารถคำนวณหาแรงในทิศทาง x และ y เป็น Wx และ Wy ซึ่งจะกระทำต่อแปเกิดเป็นโมเมนต์ดัดรอบแกนทั้งสอง ซึ่งสามารถใช้วิเคราะห์โดยสมการโมเมนต์ดัดแบบไม่สมมาตร

จากรูปโครงสร้างหลังคา น้ำหนักที่กระทำต่อแปในแนวดิ่ง W สามารถแยกแรงในทิศทาง x และ y เป็น W_x และ W_y ทำให้เกิดโมเมนต์ดัดรอบแทนทั้งสอง โครงสร้างแปจึงเป็นแรงโมเมนต์ดัดแบบไม่สมมาตร



การวิเคราะห์หาโมเมนต์ดัด มีดังนี้

น้ำหนักที่กระทำต่อแป $W = 500 \text{ N/m}$

การคิดความยาวของแปให้ดูจากจุดรองรับของแป คือระยะของจันทันหรือโครงหลังคา ในที่นี้กำหนดให้มีระยะห่าง L = 5.0 m โดยจำลองโครงสร้างเป็นคานช่วงเดียว และมีมุมเอียงของโครงหลังคา 14.04 องศา ดังนั้น

$$W_x = 500 \sin 14.04 = 120 \text{ N/m}$$

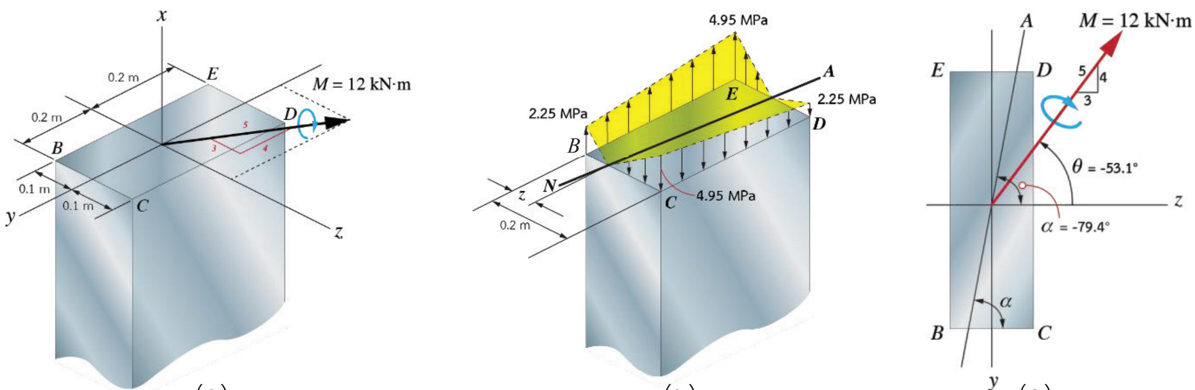
$$W_y = 500 \cos 14.04 = 490 \text{ N/m}$$

$$M_x = \frac{WL^2}{8} = \frac{490 \times 5^2}{8} = 1.53 \text{ kN.m}$$

$$M_y = \frac{120 \times 5^2}{8} = 0.38 \text{ kN.m}$$

ตัวอย่างที่ 3.5

หน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าดังแสดงในรูป ถูกกระทำด้วยโมเมนต์ดัด M = 12 kN.m จงคำนวณหาหน่วยแรงตั้งฉากปกติที่เกิดขึ้นในแต่ละมุมของภาคตัด และให้กำหนดทิศทางของแกนสะเทิน



(ก) (ข) (ค)

รูปตัวอย่างที่ 3.5

องค์ประกอบของโมเมนต์ดัดภายใน (internal moment component) จากการพิจารณาพบว่าแกน y และแกน z เป็นแกนหลักของโมเมนต์ความเฉื่อย เนื่องจากเป็นแกนที่มีความสมมาตร สำหรับหน้าตัดนี้จะจัดแกน z เป็นแกนหลักของโมเมนต์ของความเฉื่อยที่มากที่สุด โมเมนต์ดัดแบ่งออกเป็นโมเมนต์ดัดย่อยตามแนวแกน y และ z

$$M_y = -\frac{4}{5}(12\ \text{kN}\cdot\text{m}) \qquad = -9.60\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_z = \frac{3}{5}(12\ \text{kN}\cdot\text{m}) \qquad = 7.20\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

คุณสมบัติของภาคตัด (section properties) โมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่รอบแกน y และ z คือ

$$I_y = \frac{1}{2}(0.4\,\text{m})(0.2\,\text{m})^3 \ = 0.2667\,(10^{-3})\,\text{m}^4$$

$$I_z = \frac{1}{12}(0.2\,\text{m})(0.4\,\text{m})^3 = 1.067\,(10^{-3})\,\text{m}^4$$

หน่วยแรงดัด (bending stress) ประยุกต์ใช้สมการที่ 3-26 นั่นคือ

$$\sigma = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

จะได้

$$\sigma_B = -\frac{7.2(10^3)\,N\cdot m(0.2\,m)}{1.067(10^{-3})\ m^4} + \frac{-9.60(10^3)\,N\cdot m(-0.1\,m)}{0.2667(10^{-3})\,m^4} = 2.25\,MPa \quad \text{ตอบ}$$

$$\sigma_c = -\frac{7.2(10^3)\,N\cdot m(0.2\,m)}{1.067(10^{-3})\,m^4} + \frac{-9.06(10^3)\,N\cdot m(0.1\,m)}{0.2667(10^{-3})\,m^4} = -4.95\,MPa \quad \text{ตอบ}$$

$$\sigma_D = -\frac{7.2(10^3)\,N\cdot m(-0.2\,m)}{1.067(10^{-3})\,m^4} + \frac{-9.60(10^3)\,N\cdot m(0.1\,m)}{0.2667(10^{-3})\,m^4} = -2.25\,MPa \quad \text{ตอบ}$$

$$\sigma_E = -\frac{7.2(10^3)\,N\cdot m(-0.2\,m)}{1.067(10^{-3})\,m^4} + \frac{-9.60(10^3)\,N\cdot m(-0.1\,m)}{0.2667(10^{-3})\,m^4} = 4.95\,MPa \quad \text{ตอบ}$$

การกระจายหน่วยแรงตั้งฉากปกติลัพธ์ถูกวาดคร่าวๆ โดยใช้ค่านี้ ดังแสดงในรูป

ทิศทางของแกนสะเทิน (orientation of neutral axis) แกน z คือแกนสะเทิน (NA) ดังแสดงในรูป สามารถจัดตั้งโดยใช้สัดส่วน ตามแนว BC จะได้

$$\frac{2.25\,MPa}{z} = \frac{4.95\,MPa}{(0.2\,m - z)}$$

$$0.45 - 2.25z = 4.95z$$

$$z = 0.0625m$$

ในลักษณะเดียวกันระยะจาก D ไปยังแกนสะเทินในรูปที่ 3.5(ข) สามารถจัดตั้งทิศทางของแกนสะเทินได้ โดยใช้สมการที่ 3-27 ซึ่งใช้กำหนดมุม α ที่แกนนั้นทำกับแกนหลักที่มากที่สุด หรือแกน z ตามสัญลักษณ์หรือเครื่องหมาย θ จะวัดจากแกน +z ไปยังแกน +y ดังแสดงในรูปที่ 3.5(ง) โดยการเปรียบเทียบกับรูปที่ 3.5(ค) $\theta = -\tan^{-1}\frac{4}{3} = -53.1°$ (หรือ $\theta = +306.9°$) ดังนั้น

$$\tan\alpha = \frac{I_z}{I_y}\tan\theta$$

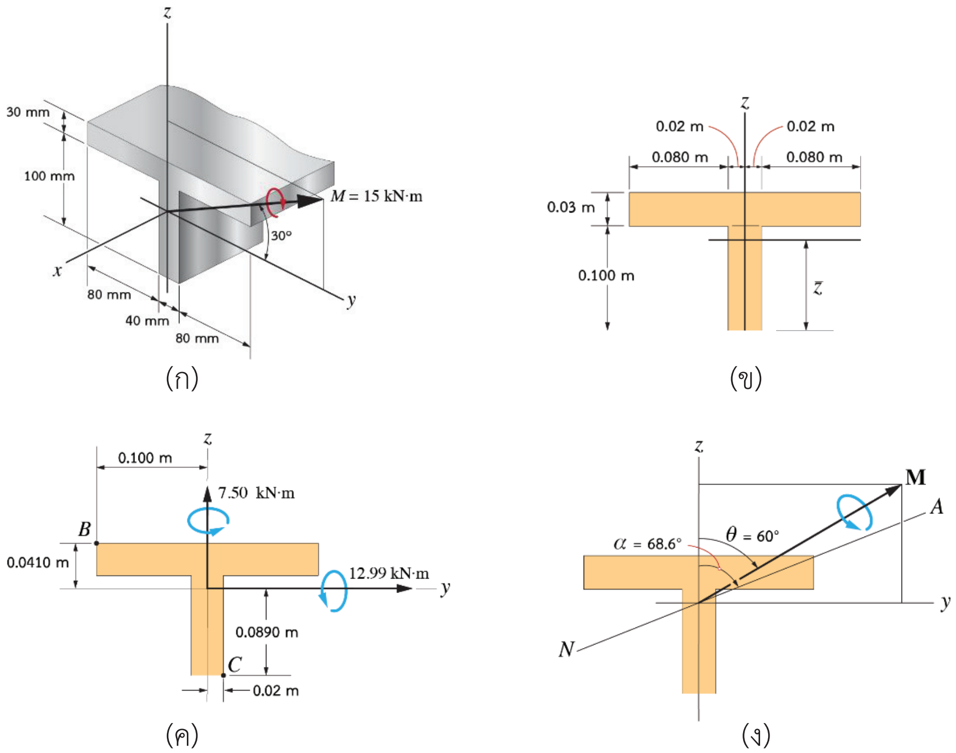
$$\tan\theta = \frac{1.067(10^{-3})\,m^4}{0.2667(10^{-3})\,m^4}\tan(-53.1°)$$

$$\alpha = 79.4° \qquad \text{ตอบ}$$

ผลลัพธ์ดังกล่าวนี้จะแสดงในรูปที่ 3.5(ค) โดยใช้ค่าของ z ที่คำนวณได้ดังข้างต้น สามารถพิสูจน์ได้โดยคำนวณจากรูปทรงเรขาคณิตของหน้าตัด ซึ่งจะได้คำตอบที่เท่ากัน

ตัวอย่างที่ 3.6

คานหน้าตัว T ได้รับโมเมนต์ดัด 15 kN.m ดังแสดงในรูป จงคำนวณหาหน่วยแรงตั้งฉากปกติที่มากที่สุดในคานและทิศทางของแกนสะเทิน



รูปตัวอย่างที่ 3.6

วิธีทำ

องค์ประกอบของโมเมนต์ดัดภายใน (internal moment components) แกน y และ z เป็นแกนหลักของโมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่ จากรูปโมเมนต์ดัดย่อยทั้งสองมีค่าเป็นบวก จะได้ว่า

$$M_y = (15\,\text{kN}\cdot\text{m})\cos 30^\circ = 12.99\,\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_z = (15\,\text{kN}\cdot\text{m})\sin 30^\circ = 7.50\,\text{kN}\cdot\text{m}$$

คุณสมบัติของภาคตัด (section properties) จากรูป โดยใช้หน่วยเป็นเมตร จะได้ว่า

$$\bar{z} = \frac{\sum \tilde{z}A}{\sum A} = \frac{[0.05\,\text{m}](0.100\,\text{m})(0.04\,\text{m}) + [0.115\,\text{m}](0.03\,\text{m})(0.200\,\text{m})}{(0.100\,\text{m})(0.04\,\text{m}) + (0.03\,\text{m})(0.200\,\text{m})}$$

$$= 0.0890\ \text{m}$$

โมเมนต์ความเฉื่อยหลักของพื้นที่หาได้จากสูตร $I = \bar{I} + Ad^2$ จะได้ว่า

$$I_z = \frac{1}{12}(0.100\,\text{m})(0.04\,\text{m})^3 + \frac{1}{12}(0.03\,\text{m})(0.200\,\text{m})^3 = 20.53(10^{-6})\,\text{m}^4$$

$$I_y = \left[\frac{1}{12}(0.04\,\text{m})(0.100\,\text{m})^3 + (0.100\,\text{m})(0.04\,\text{m})(0.0890\,\text{m} - 0.050\,\text{m})^2\right]$$

$$+\left[\frac{1}{12}(0.2000\,\text{m})(0.03\,\text{m})^3 + (0.200\,\text{m})(0.03\,\text{m})(0.115\,\text{m} - 0.0890\,\text{m})^2\right]$$

$$= 13.92(10^{-6})\,\text{m}^4$$ ตอบ

หน่วยแรงดัดที่มากที่สุด (maximum bending stress) โมเมนต์ดัดย่อยดังแสดงในรูป ทั้งคู่มีค่าเป็นบวกโดยการตรวจสอบหน่วยแรงดึงที่มากที่สุดที่เกิดขึ้นที่จุด B เนื่องจากโดยการซ้อนทับของโมเมนต์ดัดย่อยทั้งสองทำให้เกิดหน่วยแรงดึงขึ้น ในทำนองเดียวกัน หน่วยแรงอัดที่มากที่สุดที่เกิดขึ้นที่จุด C สามารถประยุกต์ใช้สมการที่ 3-25 เพื่อหาหน่วยแรงดังกล่าวนี้ จะได้

$$\sigma = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

$$\sigma_B = -\frac{7.50\,\text{kN}\times\text{m}(-0.100\,\text{m})}{20.53(10^{-6})\,\text{m}^4} + \frac{12.99\,\text{kN}\times\text{m}(0.0410\,\text{m})}{13.92(10^{-6})\,\text{m}^4}$$

$$= 74.8\ \text{MPs}$$

$$\sigma_C = -\frac{7.50\,\text{kN}\times\text{m}(0.020\,\text{m})}{20.53(10^{-6})\,\text{m}^4} + \frac{13.0\,\text{kN}\times\text{m}(-0.0890\,\text{m})}{13.92(10^{-6})\,\text{m}^4}$$

$$= -90.4\ \text{MPa}$$ ตอบ

โดยการเปรียบเทียบ หน่วยแรงตั้งฉากปกติที่มากที่สุดจะเป็นหน่วยแรงอัดและเกิดขึ้นที่จุด C

ทิศทางของแกนสะเทิน (Orientation of Neutral Axis) เมื่อประยุกต์ใช้สมการที่ 3-27 จึงจำเป็นต้องนิยาม α และ θ ให้ถูกต้อง ตามที่กล่าวมาแล้วข้างต้นแกน y จะแทนแกนของโมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่หลักที่น้อยที่สุด และ z แทนแกนสำหรับโมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่หลักที่มากที่สุด แกนดังกล่าวนี้จะมีตำแหน่งที่เหมาะสมเนื่องจาก $I_y < I_z$ โดยกำหนด θ และ α วัดเป็นมุมบวกจากแกน +z ไปยัง +y ดังนั้นจากรูปตัวอย่างที่ 3.6(ก) $\theta = +60°$ ดังนั้น

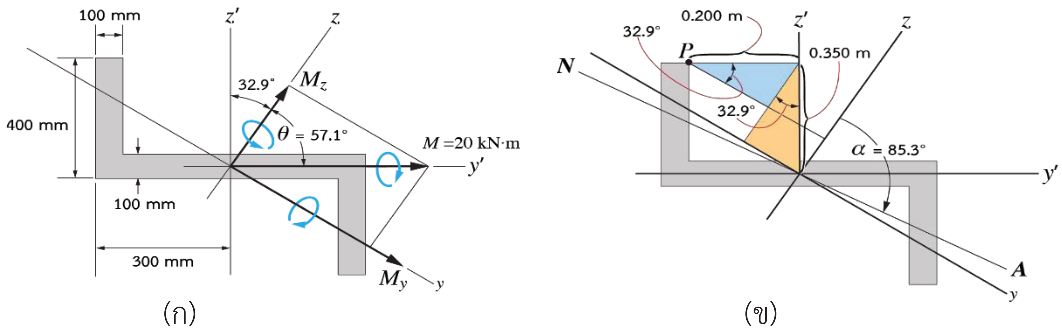
$$\tan\alpha = \frac{20.53(10^{-6})\,\text{m}^4}{13.92(10^{-6})\,\text{m}^4}\ \tan 60^\circ$$

$$\alpha = 68.6^\circ$$ ตอบ

แกนสะเทินดังแสดงในรูปตัวอย่างที่ 3.6(ง) ตามที่คาดไว้ แกนจะอยู่ระหว่างแกน y และแนวเส้นของการกระทำของ M

ตัวอย่างที่ 3.7

หน้าตัดรูปตัว z ดังแสดงในรูป ถูกกระทำด้วยโมเมนต์ดัด $M = 20\ kN.m$ แกนหลัก y และ z มีทิศทางดังแสดงในรูป นั่นคือ แกนดังกล่าวนี้แทนโมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่หลักที่น้อยที่สุด ตามลำดับ $I_y = 0.960\,(10^{-3})$ และ $I_z = 7.54\,(10^{-3})\,m^4$ ตามลำดับ จงคำนวณหาหน่วยแรงตั้งฉากปกติที่จุด P และทิศทางของแกนสะเทิน



รูปตัวอย่างที่ 3.7

วิธีทำ

จากการใช้สมการที่ 3-27 จำเป็นที่แกน z ซึ่งเป็นแกนหลักสำหรับโมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่ที่มากที่สุด เนื่องจากพื้นที่ส่วนใหญ่จะอยู่ไกลจากแกนนี้

องค์ประกอบของโมเมนต์ดัดภายใน (internal moment components)

$M_y = (20\,kN\cdot m)\sin 57.14° = 16.79\,kN\cdot m$ และ $M_z = (20\,kN\cdot m)\cos 57.1° = 10.86\,kN\cdot m$

หน่วยแรงดัด (bending stress) พิกัดของแกน y และ z ของจุด P จะหาได้ก่อน พบว่าพิกัดของแกน y', z' หาได้โดยใช้รูปสามเหลี่ยมแรเงาที่สร้างดังแสดงในรูปตัวอย่างที่ 3.7(ข) จะได้ว่า

$y_P = -0.35\sin32.9° - 0.2\cos32.9° = -0.358\ m$ และ $z_P = 0.35\cos32.9° - 0.2\sin32.9° = 0.1852\ m$

ประยุกต์ใช้สมการที่ 3-25 จะได้ว่า

$$\sigma_P = -\frac{M_z y_P}{I_z} + \frac{M_y z_P}{I_y}$$

$$= -\frac{(10.86\,kN\cdot m)(-0.3580)}{7.54\,(10^{-3})\,m^4} + \frac{(16.79\,kN\cdot m)(0.185\,m)}{0.960\,(10^{-3})\,m^4} = 3.75\ MPa \quad \text{ตอบ}$$

ทิศทางของแกนสะเทิน (orientation of neutral axis) มุม $\theta = 57.1^\circ$ ดังแสดงในรูปตัวอย่างที่ 3.7(ก) ดังนั้น

$$\tan\alpha = \left[\frac{7.54\,(10^{-3})\,\mathrm{m}^4}{0.960\,(10^{-3})\,\mathrm{m}^4}\right]\tan 57.1^\circ \quad \Rightarrow \quad \alpha = 85.3^\circ$$ ตอบ

3.4 คานโค้ง

คานโค้งในหัวข้อนี้เป็นคานที่มีความโค้งในแนวดิ่งเท่านั้น นั่นคือการประยุกต์จากคานที่ตรงมีการโค้งตัวขึ้นหรือลงในแนวดิ่ง (แกน y) แรงดัดที่กระทำต่อคานโค้งจะพิจารณาในทิศทางเดียวกับที่กระทำกับคานตรงดังเช่นรูป 3-16(ก) เมื่อคานโค้งมีลักษณะที่แตกต่างออกไปจึงจำเป็นต้องวิเคราะห์แรงภายในด้วยการประยุกต์ใช้พื้นฐานของความเค้นและความเครียดเพื่อให้ได้สมการของคานใหม่

โดยทั่วไปสมการหน่วยแรงดัด $(\sigma = \frac{My}{I})$ ที่กระทำต่อชิ้นส่วนรูปแท่งที่เหยียดตรงจะมีความเครียดตั้งฉากปกติเป็นเชิงเส้นวัดจากแกนสะเทิน แต่ถ้าคานเป็นรูปโค้ง (curved beams) สมมุติฐานนี้จะให้ผลลัพธ์ไม่แม่นยำ ดังนั้นจะต้องพัฒนาสมการอื่นที่จะหาการกระจายหน่วยแรงที่ได้ผลที่แม่นยำมากขึ้น ในหัวข้อนี้จะพิจารณาการวิเคราะห์คานโค้ง นั่นคือ ชิ้นส่วนมีแกนโค้งละถูกกระทำด้วยหน่วยแรงดัดตัวอย่างของชิ้นส่วน ดังกล่าวคือตะขอและข้อต่อแบบโซ่ ในทุกกรณีชิ้นส่วนจะไม่เพรียว แต่มีรูปโค้งคม และมิติของหน้าตัดจะใหญ่เมื่อเทียบกับรัศมีความโค้ง

การวิเคราะห์จะพิจารณาโดยสมมุติว่าพื้นที่หน้าตัดของคานโค้งนั้นมีค่าคงที่ตลอดความยาวและมีแกนสมมาตร (แกน y) ซึ่งตั้งฉากกับทิศทางของโมเมนต์ดัดที่กระทำ M ดังในรูปที่ 3-16(ก) นอกจากนั้นวัสดุต้องมีลักษณะเป็นเนื้อเดียวกันและมีคุณสมบัติเดียวกัน และมีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นเชิงเส้นเมื่อน้ำหนักกระทำเท่ากันในกรณีคานยืดตรง สำหรับคานโค้งสมมุติให้ระนาบหน้าตัดของชิ้นส่วนคานโค้งยังคงเป็นระนาบภายหลังจากมีโมเมนต์ดัดกระทำ นอกจากนั้นการบิดใดๆ ของหน้าตัดภายในระนาบตัวเองจะไม่ถูกนำมาพิจารณา

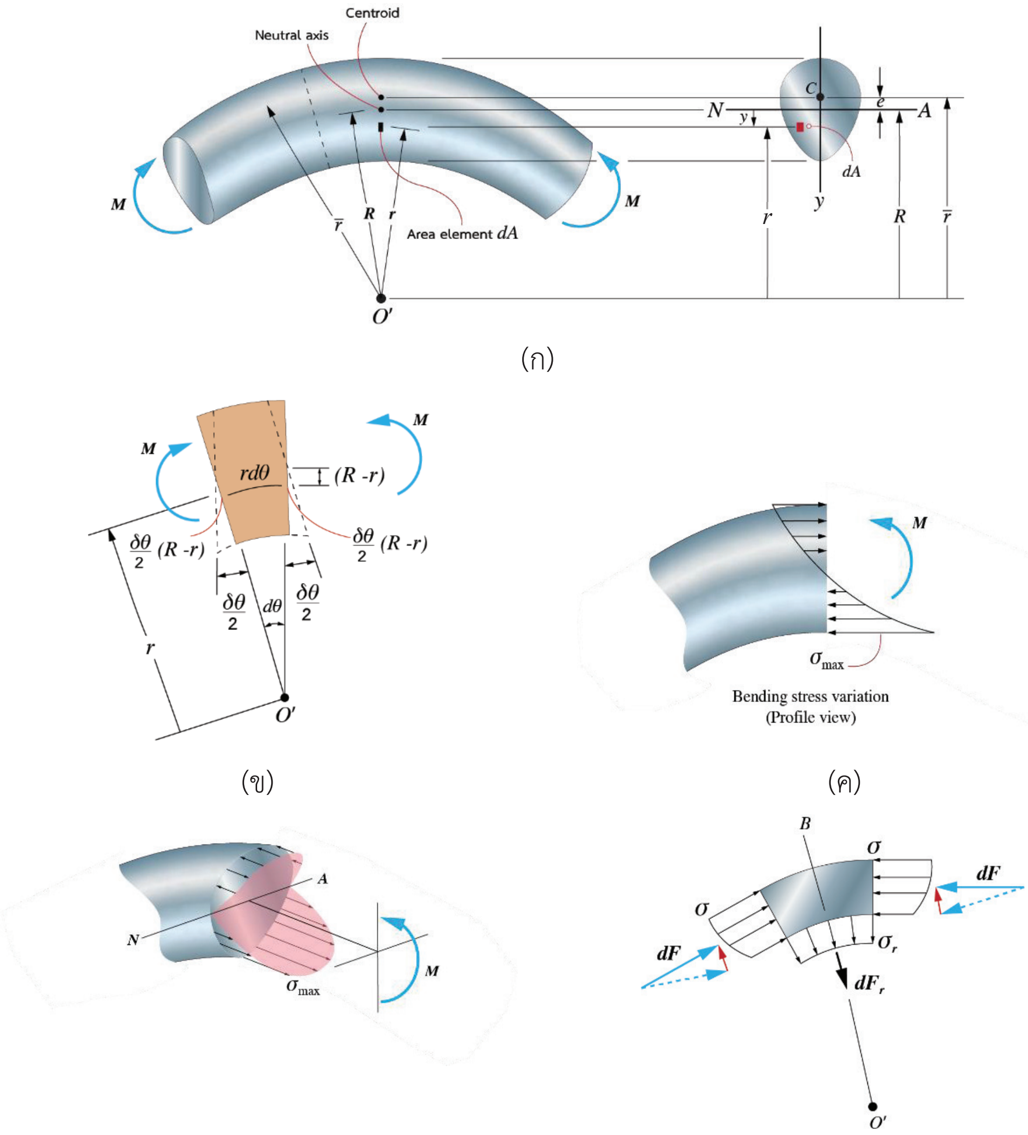
ในการวิเคราะห์ จะมีรัศมีสามค่าวัดจากจุดศูนย์กลางของความโค้ง O' ของชิ้นส่วนถูกกำหนดในรูปที่ 3-16(ก) มีรายละเอียดดังนี้ $\bar{r}$ เป็นตำแหน่งที่ทราบค่าของจุดศูนย์ถ่วงของพื้นที่หน้าตัด R เป็นตำแหน่งที่ยังไม่กำหนดของแกนสะเทิน และ r อยู่ที่จุดที่กำหนดบริเวณชิ้นส่วนพื้นที่หน้าตัด dA พบว่าแกนสะเทินอยู่ภายในหน้าตัด เนื่องจากโมเมนต์ M ทำให้เกิดแรงอัดในส่วนของคานและหน่วยแรงดึงในส่วนล่างของคาน และโดยคำจำกัดความของแกนสะเทินนั้นบนเส้นแกนจะมีค่าของความเครียดเป็นศูนย์ (ไม่มีการยืดหดตัวของวัสดุ) มีผลให้หน่วยแรงเป็นศูนย์

ถ้าแยกชิ้นส่วนเล็กๆ ของคานในรูปที่ 3-16(ก) หน่วยแรงมีแนวโน้มที่จะเปลี่ยนแปลงรูปร่างของวัสดุ โดยแต่ละหน้าตัดจะหมุนรอบมุม $\delta\theta/2$ ความเครียดตั้งฉากปกติ ε ในแถบที่กำหนดของวัสดุที่จุดที่จะหา r แถบนี้จะมีความยาวแรก $r d\theta$ ดังแสดงในรูปที่ 3-16(ข) เนื่องจากมุมหมุน $\delta\theta/2$ อย่างไรก็ตาม การเปลี่ยนแปลงความยาวทั้งหมดของแถบคือ $\delta\theta/2\,(R-r)$ ดังนั้น

$$\varepsilon = \frac{\delta\theta\,(R-r)}{r d\theta}$$

นิยามให้ $k = \delta\theta/d\theta$ ซึ่งมีค่าคงที่สำหรับชิ้นส่วนเฉพาะใดๆ จะได้ว่า

$$\varepsilon = k\left(\frac{R-r}{r}\right)$$



รูปที่ 3-16 คานโค้งและการวิเคราะห์

ซึ่งแตกต่างจากกรณีของคานเหยียดตรง พบว่าความเครียดตั้งฉากปกติเป็นฟังก์ชันไม่เป็นแบบเชิงเส้น ในเทอมของ r โดยมีการแปรค่าแบบไฮเปอร์โบลิก เหตุการณ์นี้จะเกิดขึ้นถึงแม้ว่าหน้าตัดของคานยังคงอยู่ในระนาบเดิมหลังจากการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง จากพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นกฎของฮุค $(\sigma = E\varepsilon)$ จะถูกนำมาใช้ ดังนั้นหน่วยแรงจะเป็นฟังก์ชันของตำแหน่ง กล่าวคือ

$$\sigma = Ek\left(\frac{R-r}{r}\right) \tag{3-28}$$

สมการที่ได้เป็นสมการไม่เป็นเชิงเส้น ซึ่งสามารถนำมาใช้หาตำแหน่งของแกนสะเทินและสัมพันธ์กับการกระจายตัวของหน่วยแรงกับโมเมนต์ดัดลัพธ์ภายใน M

เพื่อหาตำแหน่ง R ของแกนสะเทิน ต้องการแรงลัพธ์ภายในที่เกิดโดยการกระจายของหน่วยแรงที่กระทำบนหน้าตัดมีค่าเท่ากับศูนย์ นั่นคือ

$$F_R = \sum F_x \; ; \int_A \sigma dA = 0$$

$$\int_A Ek\left(\frac{R-r}{r}\right) dA = 0$$

เนื่องจาก EK และ R มีค่าคงที่ จะได้ว่า

$$R\int_A \frac{dA}{r} - \int_A dA = 0$$

แก้ปัญหาได้

$$R = \frac{A}{\int_A \frac{dA}{r}} \tag{3-29}$$

เมื่อ

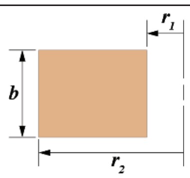
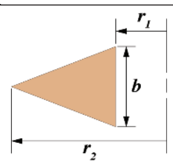
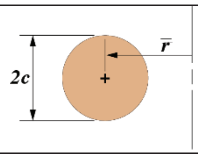
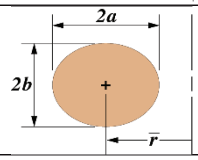
R = ตำแหน่งของแกนสะเทิน กำหนดจากจุดศูนย์กลางของความโค้ง O' ชิ้นส่วน

A = พื้นที่หน้าตัดของชิ้นส่วน

R = ตำแหน่งที่อยู่บนชิ้นส่วนที่มี พื้นที่หน้าตัด dA บนหน้าตัด (วัดจากจุดศูนย์กลางของความโค้ง O' ของชิ้นส่วน)

เทอมอินทีกัลป์ในสมการที่ 3-29 ขึ้นอยู่กับรูปทรงเรขาคณิตของหน้าตัดต่างๆ ที่มักใช้กันเสมอ ผลของหน้าตัดต่างๆ แสดงในตารางที่ 3.1

ตารางที่ 3.1 เทอมอินทีกัลป์ของหน้าตัดต่างๆ รูปทรงเรขาคณิต

รูปทรง (shape)	**พื้นที่** (area)	$\int_A \frac{dA}{r}$
	$b(r_2 - r_1)$	$b\ln\frac{r_2}{r_1}$
	$\frac{b}{2}(r_2 - r_1)$	$\frac{br_2}{(r_2 - r_1)}\left(\ln\frac{r_2}{r_1}\right) - b$
	πc^2	$2\pi\left(\bar{r} - \sqrt{\bar{r}^2 - c^2}\right)$
	πab	$\frac{2\pi b}{a}\left(\bar{r} - \sqrt{\bar{r}^2 - a^2}\right)$

เพื่อหาความสัมพันธ์กับการกระจายของหน่วยแรงและโมเมนต์ดัดต้องการให้โมเมนต์ดัดลัพธ์ภายในมีค่าเท่ากับโมเมนต์ดัดของของการกระจายหน่วยแรงคำนวณรอบแกนสะเทิน จากรูปที่ 3-16(ก) หน่วยแรง σ กระทำต่อชิ้นส่วนพื้นที่ dA และอยู่ที่ระยะ y วัดจากแกนสะเทินทำให้เกิดแรง $dF = \sigma dA$ กระทำต่อชิ้นส่วนละโมเมนต์ดัดของแกนสะเทิน $dM = y(\sigma dA)$ โมเมนต์ดัดนี้เป็นค่าบวกเนื่องจากกฎมือขวาโมเมนต์ดัด จะมีทิศทางเดียวกันกับ M สำหรับหน้าตัดทั้งหมด จะได้ว่า $M = \int y\sigma dA$

เนื่องจาก $y = R - r$ และ σ ถูกนิยามโดยสมการที่ 3-28 จะได้ว่า

$$M = \int_A (R - r)\,Ek\left(\frac{R - r}{r}\right)dA$$

ทำการจัดเทอมใหม่ โดย EK และ R เป็นค่าคงที่ จะได้ว่า

$$M = Ek\left(R^2\int_A \frac{dA}{r} - 2R\int_A dA + \int_A r\,dA\right)$$

เทอมแรกของการอินทีกัลป์แรกเทียบกับ A/R ของสมการที่ 3-29 และเทอมอินทีกัลป์ที่ 2 เป็นพื้นที่หน้าตัด A ตำแหน่งของจุดเซนทรอยด์ของหน้าตัดหาได้จาก $\bar{r} = \int rdA/A$ เทอมอินทีกัลป์ที่ 3 สามารถแทนที่ได้โดย $\bar{r}A$ ดังนั้น สามารถเขียนได้ว่า

$$M = Ek\left(R^2\left(\frac{A}{R}\right) - 2RA + \bar{r}\right)$$

$$M = EkA(\bar{r} - R)$$

แทนค่า $k = \dfrac{M}{EA(\bar{r} - R)}$ ลงในสมการที่ 3-28 ดังนั้น

$$\sigma = \frac{M(R-r)}{Ar(\bar{r}-R)} \tag{3-30}$$

เมื่อ

σ = หน่วยแรงตั้งฉากปกติในชิ้นส่วน

M = โมเมนต์ภายใน หาจากวิธีภาคตัดและใช้สมการสมดุล และคำนวณรอบแกนสะเทิน โมเมนต์ดัดจะมีค่าเป็นบวกถ้าโมเมนต์มีแนวโน้มที่จะเพิ่มรัศมีของความโค้งของชิ้นส่วน นั่นคือ โมเมนต์ดัดมีแนวโน้มที่จะยืดชิ้นส่วน

A = พื้นที่หน้าตัดของชิ้นส่วน

R = ระยะวัดจากจุดศูนย์กลางของความโค้งไปยังแกนสะเทิน หาได้จากสมการที่ 3-30

$\bar{r}$ = ระยะวัดจากจุดศูนย์กลางของความโค้งไปยังจุดศูนย์ถ่วงของพื้นที่หน้าตัด

r = ระยะวัดจากจุดศูนย์กลางของความโค้งไปยังจุดที่หน่วยแรง σ ที่ต้องการคำนวณจากรูปที่ 3-16(ก) $y = R - r$ นอกจากนั้นค่าคงที่และระยะเล็กๆ $e = \bar{r} - R$ เมื่อผลลัพธ์นี้ถูกแทนค่าในสมการที่ 3-30 สมการเขียนใหม่ได้ว่า

$$\sigma = \frac{My}{Ae(R-y)} \tag{3-31}$$

สมการทั้งสองข้างต้นแทนรูปแบบที่เรียกว่า สมการคานโค้ง (curved-beam formulation) ซึ่งเหมือนกับสมการดัดที่ใช้หาการกระจายหน่วยแรงตั้งฉากปกติในชิ้นส่วนโค้ง การกระจายนี้จะเป็นไฮเปอร์โบลิก ดังตัวอย่างในรูปที่ 3-16(ค) และ (ง) เนื่องจากหน่วยแรงกระทำในทิศทางของเส้นรอบวงของคาน บางครั้งเรียกว่า หน่วยคานของเส้นรอบวง (circumferential stress) เนื่องจากความโค้งของคาน หน่วยแรงของเส้นรอบวงทำให้เกิดองค์ประกอบที่สอดคล้องกันของหน่วยแรงตามแนวรัศมี (radial stress) เนื่องจากกระทำในทิศทางตามรัศมี เพื่อพิสูจน์ จะพิจารณาผังวัตถุอิสระดังแสดงในรูปที่ 3-16(จ) ที่มีชิ้นส่วนย่อยส่วนบนของชิ้นส่วนเล็กๆ ในรูปที่ 3-16(ข) หน่วยแรงในแนวรัศมี σ_r มีความจำเป็นเนื่องจากทำให้เกิดแรง dF_y เพื่อหาความสมดุลขององค์ประกอบแรงตามเส้นรอบวง dF ที่กระทำตามแนวเส้น $O'B$

บางครั้งหน่วยแรงภายในรัศมีชิ้นส่วนรูปโค้งมีความสำคัญมากโดยเฉพาะอย่างยิ่งถ้าชิ้นส่วนถูกสร้างจากแผ่นบาง ยกตัวอย่างเช่น รูปทรงหน้าตัดตัวไอ (i-section) หน่วยแรงในแนวรัศมีจะมีค่ามากกว่าหน่วยแรงตามเส้นรอบวง ดังนั้น ชิ้นส่วนจะถูกออกแบบเพื่อต้านทานทั้งสองหน่วยแรง สำหรับกรณีต่างๆ หน่วยแรงดังกล่าวนี้ไม่สามารถนำมาพิจารณา โดยเฉพาะอย่างยิ่งหน้าตัดของชิ้นส่วนเป็นหน้าตัดตัน (solid section) สำหรับกรณีดังกล่าวนี้ สมการคานโค้งจะให้ผลที่ใกล้เคียงกับที่หาได้จากการทดลองหรือการวิเคราะห์ทางคณิตศาสตร์บนพื้นฐานทฤษฎีของความยืดหยุ่น

สมการคานโค้งโดยปกติจะใช้เมื่อคานโค้งเด่นชัดมาก ดังเช่นในกรณีตะขอหรือวงแหวน อย่างไรก็ตาม ถ้ารัศมีของความโค้งมีค่ามากกว่าห้าเท่าของความลึกของชิ้นส่วน สมการการดัดโดยปกติใช้ค่าของหน่วยแรงดัด โดยเฉพาะอย่างยิ่งสำหรับหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่อัตราส่วนดังกล่าวเท่ากับ 5 หน่วยแรงตั้งฉากปกติที่ค่ามากที่สุด เมื่อคำนวณโดยสมการหน่วยแรงดัดจะมีค่าประมาณร้อยละ 7 ข้อยกเว้นว่าค่าที่ได้จากการคำนวณโดยสมการคานโค้ง ความผิดพลาดนี้จะลดลงเมื่ออัตราส่วนรัศมีของความโค้งต่อความลึกมีค่ามากกว่า 5

วิธีการสำหรับวิเคราะห์ (procedure for analysis)

สมการคานโค้งใช้หาการกระจายหน่วยแรงตั้งฉากหรือตามแนวเส้นรอบวงในชิ้นส่วนที่มีหน้าตัดคงที่และทำด้วยวัสดุที่มีลักษณะเนื้อเดียวและมีความยืดหยุ่นแบบเชิงเส้น

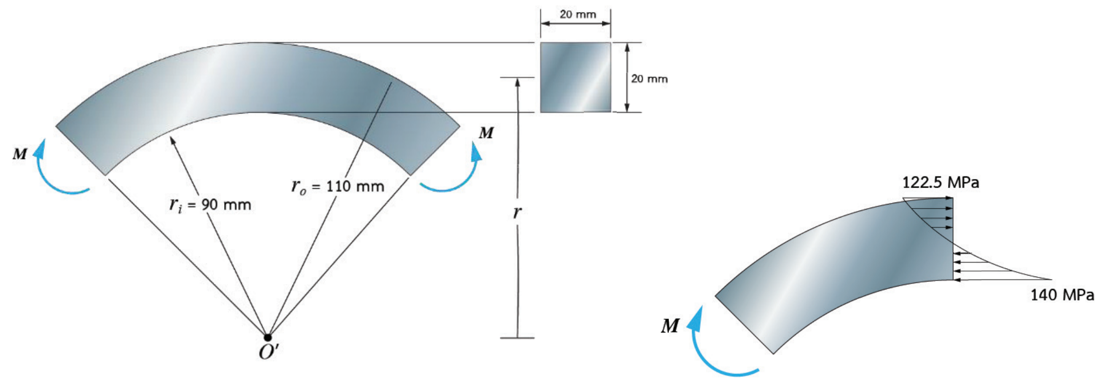
คุณสมบัติของภาคตัด (section properties) หาพื้นที่หน้าตัด A และตำแหน่งของศูนย์ถ่วง $\bar{r}$ วัดจากจุดศูนย์กลางของความโค้งการหาตำแหน่งของแกนสะเทิน R โดยใช้สมการที่ 3-29 หรือตารางที่ 3.1 ถ้าพื้นที่หน้าตัดประกอบด้วยส่วน n ส่วนจะหาได้โดย $\int dA/r$ ของแต่ละส่วนแล้วจึงใช้สมการที่ 3-29 เพื่อพิจารณาหน้าตัดเมื่อ $R = \sum A / \sum\left(\int dA/r\right)$ ในกรณีที่ $R \le \bar{r}$

หน่วยแรงตั้งฉากปกติ (Normal Stress) หน่วยแรงตั้งฉากปกติอยู่ที่จุด r วัดจากจุดศูนย์กลางของความโค้งที่หาได้จากสมการที่ 3-30 ถ้าระยะทาง y ไปยังจุดที่ต้องการวัดจากแกนสะเทิน แล้วหา $e = \bar{r} - R$ และใช้สมการที่ 3-31 เนื่องจาก $\bar{r} - R$ โดยทั่วไปจะมีค่าน้อยมากจึงเป็นทางที่ดีที่สุดที่จะหาค่า $\bar{r}$ และ R ให้มีค่าความถูกต้อง เพื่อหาค่า e ที่มีตัวเลขนัยสำคัญอย่างน้อยสามตำแหน่ง

หน่วยแรงตั้งฉากปกติ σ กระทำต่อหน้าตัดทำให้เกิดโมเมนต์ดัดรอบแกนสะเทินในทิศทางเดียวกันกับโมเมนต์ดัด M ดังแสดงในรูปที่ 3-16(ค) หรือ (ง) ซึ่งสามารถตรวจสอบจากค่าคำนวณของ σ ถ้าค่าที่ได้เป็นบวกหน่วยแรงจะเป็นหน่วยแรงดึง ในขณะที่ถ้าค่าเป็นลบหน่วยแรงจะเป็นหน่วยแรงอัด การกระจายหน่วยแรงบนหน้าตัดทั้งหมดสามารถวาดหรือเขียนชิ้นส่วนเชิงปริมาตรของวัสดุและใช้แทนหน่วยแรงกระทำที่จุดบนหน้าตัดที่มีการคำนวณหน่วยแรง

ตัวอย่างที่ 3.8

แท่งเหล็กมีหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าถูกขึ้นรูปเป็นส่วนโค้งของวงกลมดังแสดงในรูป ถ้าหน่วยแรงตั้งฉากปกติที่ยอมรับได้ $\sigma_{allow} = 140$ MPa จงคำนวณหาโมเมนต์ดัดที่มากที่สุด M ที่สามารถทำต่อคานได้



รูปตัวอย่างที่ 3.8

วิธีทำ

โมเมนต์ดัดภายใน (internal moment) เนื่องจากโมเมนต์ดัด M มีแนวโน้มที่จะเพิ่มรัศมีของส่วนโค้งของแท่ง ซึ่งมีค่าเป็นบวก

คุณสมบัติของภาคตัด (section properties) หาตำแหน่งของแกนสะเทินได้โดยใช้สมการที่ 3-30 จากรูปจะได้ว่า

$$\int_A \frac{dA}{r} = \int_{90\,mm}^{110\,mm} \frac{(20\,mm)dr}{r} = (20\,mm)\ \ln r\Big|_{90\,mm}^{110\,mm} = 4.0134\,mm$$

ผลเหมือนกันนี้สามารถหาได้โดยตรงจากตารางที่ 3.1 ดังนั้น

$$R = \frac{A}{\int_A dA/r} = \frac{(20\,mm)\,(20\,mm)}{4.0134\,mm} = 99.666\ mm$$

ถ้าหน่วยแรงตั้งฉากปกติจะมีค่ามากที่สุดที่ส่วนบนหรือส่วนล่างของแท่ง ดังนั้นจะหาโมเมนต์ดัด M สำหรับแต่ละกรณีโดยจะทำการเขียนผังวัตถุอิสระ เนื่องจากหน่วยแรงตั้งฉากปกติที่ส่วนบนของแท่งเป็นหน่วยแรงอัด $\sigma = -140\,MPa$

$$\sigma = \frac{M(R - r_0)}{Ar_0(\bar{r} - R)}$$

$$-140\,\text{N/mm}^2 = \frac{M(99.666\,\text{mm} - 110\,\text{mm})}{(20\,\text{mm})(20\,\text{mm})(110\,\text{mm})(100\,\text{mm} - 99.666\,\text{mm})}$$

$$M = 199094\,\text{N.mm} = 0.199\,\text{kN.m}$$

ในทำนองเดียวกันที่จุดล่างสุดของแท่ง ค่าหน่วยแรงตั้งฉากปกติจะเป็นหน่วยแรงดึงซึ่งมีค่า $\sigma = +140$ MPa

$$\sigma = \frac{M(R - r_i)}{Ar_i(\bar{r} - R)}$$

$$140\,\text{MPa} = \frac{M(99.666\,\text{mm} - 90\,\text{mm})}{(20\,\text{mm})(20\,\text{mm})(90\,\text{mm})(100\,\text{mm} - 90\,\text{mm})}$$

$$M = 174153\,\text{N.mm} = 0.174\,\text{kN.m}$$ ตอบ

จากการเปรียบเทียบโมเมนต์ดัดที่มากที่สุดที่กระทำ คือ $174153\ \text{N}\cdot\text{mm}$ เป็นหน่วยแรงตั้งฉากปกติที่มากที่สุดที่เกิดขึ้นที่ส่วนล่างของแท่ง หน่วยแรงอัดที่ส่วนบนของแท่งจะได้

$$\sigma = \frac{174153\,\text{N}\cdot\text{mm}(99.666\,\text{mm} - 110\,\text{mm})}{(20\,\text{mm})(20\,\text{mm})(110\,\text{mm})(100\,\text{mm} - 99.666\,\text{mm})}$$

$$= 122.5\,\text{N/mm}^2$$

การกระจายหน่วยแรงดัดดังแสดงในรูป พบว่าตลอดการคำนวณข้างต้น R จะหาได้จากตัวเลขนัยสำคัญต่างๆ เพื่อยืนยันว่า $(\bar{r} - R)$ เป็นค่าที่ถูกต้องอย่างน้อยต้องใช้เลขนัยสำคัญสามตำแหน่ง

ถ้าพิจารณาคานเป็นแบบตรง จะได้ว่า

$$\sigma = \frac{Mc}{I}$$

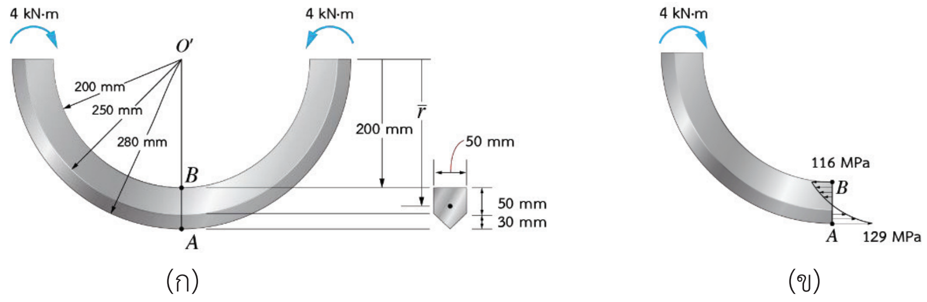
$$140\,\text{N/mm}^2 = \frac{M(110\,\text{mm})}{\frac{1}{2}(20\,\text{mm})(20\,\text{mm})^3}$$

$$M = 186666.7\,\text{N}\cdot\text{mm} = 0.187\,\text{kN}\cdot\text{m}$$ ตอบ

มีความคลาดเคลื่อนประมาณ 7% จากค่าที่คำนวณอย่างถูกต้องและแม่นยำข้างต้น

ตัวอย่างที่ 3.9

คานโค้งดังแสดงในรูปด้านล่างถูกกระทำด้วยโมเมนต์ดัด $4\ \text{kN}\cdot\text{m}$ จงคำนวณหาหน่วยแรงตั้งฉากปกติที่มากที่สุดที่เกิดในแท่ง



รูปตัวอย่างที่ 3.9

วิธีทำ

โมเมนต์ดัดภายใน (internal moment) แต่ละภาคตัดของแท่งถูกกระทำด้วยโมเมนต์ดัดลัพธ์ภายในเท่ากับ $4\text{kN}\cdot\text{m}$ เนื่องจากโมเมนต์ดัดนี้มีแนวโน้มจะลดรัศมีของความโค้งของแท่ง ซึ่งมีค่าเป็นลบดังนั้น $\text{M} = -4\ \text{kN}\cdot\text{m}$

คุณสมบัติของภาคตัด (section properties) จะพิจารณาหน้าตัดที่ประกอบด้วยชิ้นส่วนสี่เหลี่ยมผืนผ้าและสามเหลี่ยม พื้นที่ตัดทั้งหมด คือ

$$\sum \text{A} = (0.05\text{m})^2 + \frac{1}{2}(0.05\text{m})(0.03\text{m}) = 3.2500(10^{-3})\text{m}^2$$

ตำแหน่งของจุดเซนทรอยด์ จะหาได้เมื่อเทียบกับจุดศูนย์กลางของความโค้ง จุด O' ดังแสดงในรูป

$$\bar{\text{r}} = \frac{\sum \bar{\text{r}}\text{A}}{\sum \text{A}}$$

$$= \frac{[0.225\,\text{m}](0.05\,\text{m})(0.05\,\text{m}) + [0.260\,\text{m}]\frac{1}{2}(0.050\,\text{m})(0.030\,\text{m})}{3.250(10^{-3})\,\text{m}^2}$$

$$= 0.23308\ \text{m}$$

เราสามารถคำนวณ $\int_A dA/r$ ในแต่ละส่วนได้ แล้วมารวมกันได้ภายหลัง โดยใช้ตารางที่ 3.1 สำหรับหน้าตัดส่วนที่เป็นสี่เหลี่ยม

$$\int_A \frac{dA}{r} = 0.05\text{m}\left(\ln\frac{0.250\text{m}}{0.200\text{m}}\right) = 0.011157\text{m}$$

สำหรับหน้าตัดสวนที่เป็นสามเหลี่ยม

$$\int_A \frac{dA}{r} = \frac{(0.05\text{m})(0.280\text{m})}{(0.280\text{m} - 0.250\text{m})}\left(\ln\frac{0.280\text{m}}{0.250\text{m}}\right) - 0.05\text{m} = 0.0028867\text{m}$$

ดังนั้น ตำแหน่งของแกนสะเทินสามารถหาได้จาก

$$R = \frac{\sum A}{\sum\int_A dA/r} = \frac{3.2500(10^{-3})\ \text{m}^2}{0.011157\,\text{m} + 0.0028867\,\text{m}} = 0.23142\,\text{m}$$

พบว่า $R < \bar{r}$ ตามที่คาดไว้ นอกจากนั้นการคำนวณจะให้ค่าความถูกต้องที่พอเพียง ดังนั้น $(\bar{r} - R) = 0.23308\text{ m} - 0.23142\text{ m} = 0.00166\text{ m}$ ซึ่งมีเลขนัยสำคัญสามตำแหน่ง

หน่วยแรงตั้งฉากปกติ (normal stress) หน่วยแรงตั้งฉากปกติที่มากที่สุดที่เกิดขึ้นที่ A หรือ B ประยุกต์ใช้สมการการดัดที่มีความโค้งโดยคำนวณหาหน่วยแรงตั้งฉากปกติที่ B, R_B= 0.200 m จะได้ว่า

$$\sigma_B = \frac{M(R - r_B)}{Ar_B(\bar{r} - R)} = \frac{(-4\,\text{kN}\cdot\text{m})(0.23142\,\text{m} - 0.200\,\text{m})}{3.2500(10^{-3})\,\text{m}(0.200\,\text{m})(0.00166\,\text{m})}$$

$$= -116\text{ MPa}$$

ที่จุด A, r_A = 0.28 m และหน่วยแรงตั้งฉากปกติ คือ

$$\sigma_A = \frac{M(R - r_A)}{Ar_A(\bar{r} - R)} = \frac{(-4\,\text{kN}\cdot\text{m})(0.32142\,\text{m} - 0.280\,\text{m})}{3.2500(10^{-3})\,\text{m}(0.280\,\text{m})(0.00166\,\text{m})}$$

$$= 129\text{ MPa}$$ ตอบ

จากการเปรียบเทียบหน่วยแรงตั้งฉากปกติที่มากที่สุดที่ A การกระจายหน่วยแรงในรูปสองมิติ ดังแสดงในรูปตัวอย่างที่ 3.9(ข)

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 3

1) คานโค้งดังรูป มี M = 40 N.m กระทำ จงหาค่าหน่วยแรงดัดดึงและหน่วยแรงดัดอัดสูงสุดที่เกิดขึ้น โดยเปรียบเทียบค่าที่ได้กับคานตรงที่มีหน้าตัดและโมเมนต์ดัดกระทำเท่ากัน

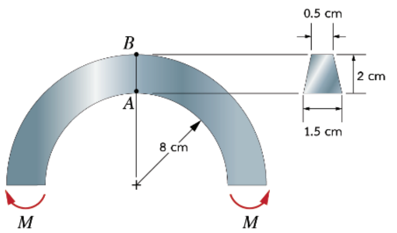
2) คานโค้งทำจากวัสดุที่มีหน่วยแรงดัดที่ยอมให้ σ_{allow} = 168 MPa จงหาค่าโมเมนต์ดัดสูงสุด M ที่กระทำกับคาน

3) คานโค้งดังรูปถูกกระทำด้วยแรง M = 40 N.m จงหาค่าหน่วยแรงดัดสูงสุดที่เกิดขึ้นในคาน

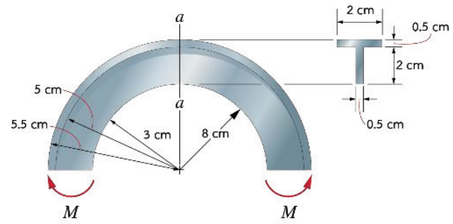
4) คานโค้งหน้าตัดสี่เหลี่ยมผืนผ้าถูกกระทำด้วยแรงคู่ควบ จงหาค่าหน่วยแรงดัดดึงและหน่วยแรงดัดอัดสูงสูงสุด ที่หน้าตัด a-a

5) ชิ้นส่วนโครงสร้างมีหน้าตัดสี่เหลี่ยมจัตุรัสถูกกระทำด้วยโมเมนต์ดัด M = 850 N.m ดังรูป จงหาหน่วยแรงดัดที่จุดมุม A, B, D, และ E และวาดรูปการกระจายหน่วยแรง เมื่อ θ = 30°

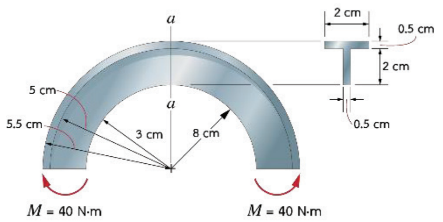
6) โมเมนต์ดัดกระทำต่อหน้าตัดของคานตัว T ที่มีขนาด M = 15 kip.ft และมีทิศทางดังแสดงในรูป จงคำนวณหาหน่วยแรงดัดที่จุด A และ B รวมทั้งหาตำแหน่ง $\bar{y}$ ของจุดเซนทรอยด์ C ด้วย



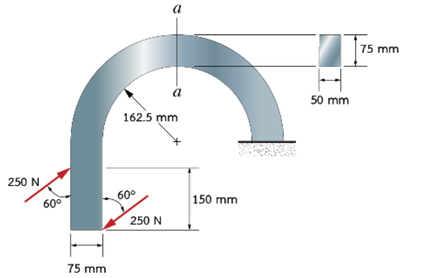
รูปแบบฝึกหัดข้อ 1)



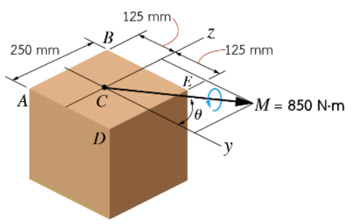
รูปแบบฝึกหัดข้อ 2)



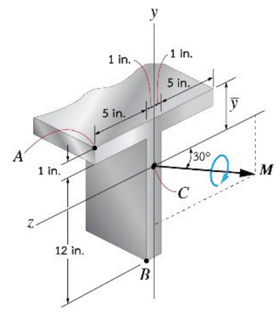
รูปแบบฝึกหัดข้อ 3)



รูปแบบฝึกหัดข้อ 4)



รูปแบบฝึกหัดข้อ 5)

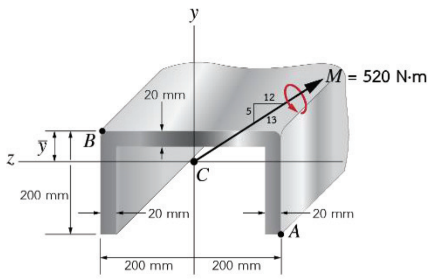


รูปแบบฝึกหัดข้อ 6)

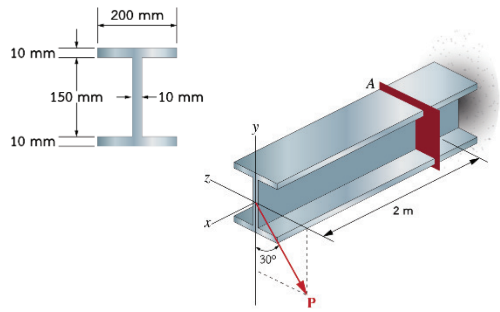
7) ถ้าโมเมนต์ลัพธ์ภายในกระทำบนหน้าตัดของข้อต่ออะลูมิเนียมมีขนาด M = 520 N.m และมีทิศทางดังแสดงในรูป จงคำนวณหาหน่วยแรงดัดที่มากที่สุด รวมทั้งหาตำแหน่ง $\bar{y}$ ของจุดศูนย์ถ่วง C ของพื้นที่หน้าตัดของข้อต่อ รวมทั้งระบุทิศทางของแกนสะเทินและระบุทิศของแกนสะเทิน

8) คานยื่นเหล็กปีกกว้างถูกกระทำด้วยแรงกระทำแบบจุด P = 600 N ที่ปลายคานดังแสดงในรูป จงคำนวณหาหน่วยแรงดัดที่มากที่สุดที่เกิดขึ้นที่ภาคตัด A

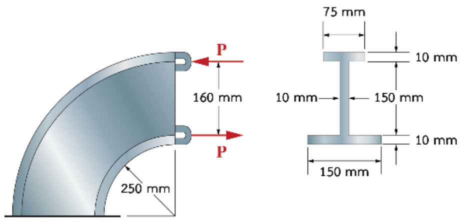
9) ถ้า P = 6 kN จงคำนวณหาหน่วยแรงดัดดึงและหน่วยแรงดัดอัดที่เกิดขึ้นในคาน



รูปแบบฝึกหัดข้อ 7)



รูปแบบฝึกหัดข้อ 8)



รูปแบบฝึกหัดข้อ 9)

บทที่ 4
คานบนฐานรากยืดหยุ่น

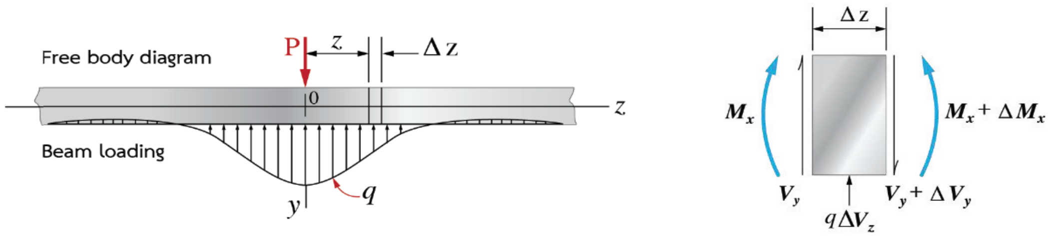
4.1 บทนำ

การวิเคราะห์โครงสร้างสำหรับคานทั่วไปขึ้นอยู่กับประเภทของจุดรองรับ ซึ่งการยึดรั้งของจุดรองรับจะส่งผลต่อแรงภายในของชิ้นส่วนโครงสร้างและรายละเอียดการออกแบบ อีกทั้งยังมีผลต่อค่าของการโก่งตัวอีกด้วย แต่ยังมีคานบางประเภทที่มีลักษณะเฉพาะ เช่น คานรางรถไฟหรือเข็มพืด (sheet pile) ที่มีลักษณะที่รองรับต่างจากปกติ เช่น วางบนที่รองรับที่มีความยืดหยุ่นและอาจต่อเนื่อง ลักษณะหลักการวิเคราะห์โครงสร้างคานบนฐานรากยืดหยุ่น มีลักษณะแตกต่างออกไปในรายละเอียด ในการประยุกต์ทางวิศวกรรมโครงสร้างจะพบว่าคานที่มีค่าสติฟเนสการดัดมีค่าน้อยๆ วางอยู่บนฐานรากที่ยืดหยุ่นได้ และมีแรงกระทำบนคานซึ่งทำให้เกิดการถ่ายแรงจากคานไปฐานราก คานและฐานรากจึงถูกออกแบบให้ต้านแรงกระทำไม่เกิดการเสียหายหรือวิบัติ ซึ่งการเสียหายมักเกิดขึ้นในคานก่อนที่จะเกิดขึ้นในฐานราก ในหัวข้อนี้ฐานรากถูกสมมติให้มีความแข็งแรงหรือกำลังเพียงพอที่จะป้องกันการเสียหายและให้การถ่ายแรงจากคานไปสู่ฐานรากเป็นแบบยืดหยุ่นเชิงเส้น (linear elastic) ดังนั้น แรงดันที่เกิดขึ้นที่จุดใดๆ ระหว่างคานกับฐานรากเป็นสัดส่วนโดยตรงกับการโก่งตัวเล็กน้อย (small deflection) กล่าวคือ ถ้าการโก่งตัวมีค่ามากความต้านทานของฐานรากจะไม่เป็นสัดส่วนโดยตรงกับการโก่งตัวอีกต่อไป การโก่งตัวที่มีค่ามากทำให้ความต้านทานของฐานรากเพิ่มขึ้นกว่าการที่คานโก่งตัวเล็กน้อย ความต้านทานที่เพิ่มขึ้นนี้เป็นการตอบสนองแบบไร้เชิงเส้น (nonlinear response) ของฐานรากเป็นผลให้การโก่งตัวและความเค้นในคานลดลงไปเมื่อเทียบกับการตอบสนองแบบเชิงเส้น ดังนั้นการพิจารณาในขั้นนี้เป็นเฉพาะการโก่งตัวที่เกิดขึ้นเล็กน้อย (small deflection) ซึ่งสามารถประยุกต์ใช้ในทางวิศวกรรมโยธาทั่วไป

4.2 ทฤษฎีทั่วไป

การตอบสนองต่อแรงกระทำของคานที่วางอยู่บนฐานรากยืดหยุ่นแสดงได้ด้วยสมการอนุพันธ์เพียงสมการเดียวพร้อมกับเงื่อนไขขอบเขตของคานที่แตกต่างกันไป ขึ้นอยู่กับการรองรับของคานที่ปลายคาน

พิจารณาคานอันหนึ่งที่มีความยาวอนันต์ (infinite length) วางอยู่บนฐานรากยืดหยุ่นตลอดความยาวของคาน ดังแสดงในรูปที่



รูปที่ 4-1 การตอบสนองของคานบนฐานรากยืดหยุ่นต่อแรงกระทำที่เป็นจุด

ให้จุดกำเนิดของแกน y และ z อยู่ตรงศูนย์กลางของหน้าตัด และให้แรง P กระทำต่อคานจุดกำเนิดของพิกัด xyz แกน z อยู่ในแนวเดียวกับแนวแกนของคาน และคาน y ตั้งฉากกับฐานราก แรง P ทำให้คานโก่งตัว ทำให้ฐานรากยืดหยุ่นเคลื่อนที่ และทำให้เกิดแรงกระจายระหว่างคานและฐานราก แรงต้านทานที่ฐานรากกระทำต่อคานเปรียบเสมือนแรงกระจายด้านข้างต่อหน่วยความยาวมีค่าเท่ากับ q ในการแก้ปัญหาแบบนี้จะพบว่าบางส่วนของคาน การโก่งตัวอาจเป็นลบได้ ทั้งนี้เนื่องจากคานถูกสมมติว่าอยู่ติดกับฐานราก ดังนั้นอาจทำให้เกิดแรงดึงต่อคานได้

พิจารณาไดอะแกรมของชิ้นส่วนอิสระของชิ้นส่วนเล็กๆ ของคานที่ยาว Δz ที่วัดระยะห่างจากจุดกำเนิดได้เท่ากับ z ทิศทางบวกของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดตัวที่แสดงไว้ ดังนั้นเครื่องหมายที่กำหนดนี้และเงื่อนไขของการโก่งตัวเล็กน้อย สมการอนุพันธ์ของคานเขียนได้ดังนี้

$$\frac{dy}{dz} = \theta \qquad (4\text{-}1a)$$

$$EI_z \frac{d^2y}{dz^2} = -M_z \qquad (4\text{-}1b)$$

$$EI_z \frac{d^3y}{dz^3} = -V_y \qquad (4\text{-}1c)$$

$$EI_z \frac{d^4y}{dz^4} = -q \qquad (4\text{-}1d)$$

โดยที่ q มีค่าเป็นบวกถ้ามีทิศทางดันคานขึ้น นั่นคือ q เป็นบวกเมื่อกระทำในทิศทางสวนกับทางบวกแกน y

สำหรับปัญหาแบบเชิงเส้น แรงกระจาย q เป็นสัดส่วนโดยตรงกับการโก่งตัว y ดังนี้

$$q = ky \qquad (4\text{-}2)$$

โดยที่สัมประสิทธิ์ของสปริง (spring coefficient) k เขียนได้เป็น

$$k = bk_o \qquad (4\text{-}3)$$

โดยที่ b เป็นความกว้างของคาน และ k_o เป็นค่าคงที่ของสปริงสำหรับฐานราก หน่วยของ k_o เป็นแรงต่อหน่วยพื้นที่ต่อความยาว ดังเช่น N/mm^2/mm หรือ N/mm^3 แทนค่าสมการที่ 4-2 ลงในสมการที่ 4-1d จะได้สมการอนุพันธ์ของการดัดของคานที่วางอยู่บนฐานรากยืดหยุ่น

$$EI_z \frac{d^4y}{dz^4} = -ky \tag{4-4}$$

โดยการใช้สัญลักษณ์

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI_x}} \tag{4-5}$$

ทำให้เขียนสมการที่ 4-3 ได้เป็น

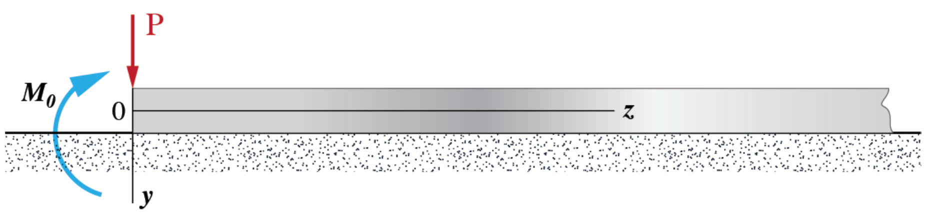
$$\frac{d^4y}{dz^4} + 4\beta^4 y = 0$$

คำตอบทั่วไปของสมการอนุพันธ์นี้มีรูปแบบดังนี้

$$y = e^{\beta z}(C_1 \sin\beta z + C_2 \cos\beta z) + e^{-\beta z}(C_3 \sin\beta z + C_4 \cos\beta z) \tag{4-6}$$

สมการที่ 4-6 เป็นคำตอบทั่วไปของการตอบสนองของคานที่ยาวมากวางอยู่บนฐานรากยืดหยุ่นโดยมีแรงแบบจุดกระทำ ค่าคงที่ในสมการที่ 4-6 หาได้จากเงื่อนไขขอบเขต

การหาคำตอบของคานที่วางอยู่บนฐานยืดหยุ่นที่มีแรงด้านข้างกระทำ อาจหาได้จากวิธีการซ้อนกัน (superposition) โดยอาศัยคำตอบของคานที่มีความยาวอนันต์ โดยมีกระทำแบบจุด (รูปที่ 4-1) และคำตอบของคานที่ยาวกึ่งอนันต์ โดยมีแรงแบบจุด P และโมเมนต์ M_o กระทำที่ปลาย ดังแสดงในรูปที่ 4-2



รูปที่ 4-2 แรงกระทำที่เป็นจุดและโมเมนต์

ในกรณีใดกรณีหนึ่ง การโก่งตัวมีค่าเป็นศูนย์ เมื่อค่าของ z มีค่ามาก ดังนั้น จากสมการที่ 4-6 พบว่า ถ้าจะให้สอดคล้องกับความเป็นจริง ตัวสัมประสิทธิ์ของ $e^{\beta z}$ จะต้องเป็นศูนย์ ซึ่งหมายความว่า ค่าคงที่ $C_1 = C_2 = 0$ นั่นเอง ดังนั้นคำตอบจากสมการที่ 4-6 เหลือเพียง

$$y = e^{-\beta z}(C_3\sin\beta z + C_4\cos\beta z); \quad z \geq 0 \tag{4-7}$$

เนื่องจากความสมมาตร ทำให้การโก่งตัวของคานรูปที่ 4-1 ที่วัดไปทางแกน z ที่เป็นลบ หาได้จากคำตอบของการโก่งตัวที่ได้จากทางแกน z ที่เป็นบวก หรือ

$$y(-z) = y(z)$$

ส่วนกรณีที่คานมีความยาวเป็นกึ่งอนันต์ คำตอบของสมการที่ 4-7 ใช้ได้โดยตรง

ค่าคงที่ C_3 และ C_4 อาจหาได้จากการพิจารณา 2 เงื่อนไข ดังนี้

i) slope ของคานตรงตำแหน่งที่แรงกระทำมีค่าเป็นศูนย์

ii) ครึ่งหนึ่งของแรง P รองรับไว้โดยฐานรากยืดหยุ่นตลอดความยาวครึ่งหนึ่งของคานจาก

เงื่อนไขแรก พบว่า

ที่ $$z = 0 \therefore \frac{dy}{dz} = 0 = \beta(C_3 - C_4)\ ;\ C_3 = C_4 = C$$

ดังนั้น สมการที่ 4-7 กลายเป็น

$$y = Ce^{-\beta z}(\sin\beta z + \cos\beta z) \tag{4-8}$$

จากเงื่อนไขที่สอง ได้ว่า

$$\int_0^{\infty} ky\,dz = \frac{P}{2} \tag{4-9}$$

แทนค่า y จากสมการที่ 4-8 ลงในสมการที่ 4-9 จะพบว่า

$$C = \frac{P\beta}{2k}$$

เงื่อนไขที่สองอาจพิจารณาได้จากพิจารณาแรงเฉือน จากสมการที่ 4-1c ได้ว่า

ที่ $$z = 0; \quad \frac{EI_x d^3y}{dz^3} = \frac{P}{2} \quad (V_y = -P/2) \tag{4-10}$$

แทนค่า y จากสมการที่ 4-8 ลงในสมการที่ 4-10 จะพบว่า

$$C = \frac{P}{8\beta^3 EI_x} = \frac{P\beta}{2k} \tag{4-11}$$

ดังนั้น สมการโก่งตัวของคานที่วางอยู่ฐานรากยืดหยุ่นเขียนได้เป็น

$$y = \frac{P\beta}{2k} e^{-\beta z}(\sin\beta z + \cos\beta z);\; z \geq 0 \tag{4-12}$$

สมการที่ 4-12 ใช้ได้เสมอเมื่อค่า z เป็นบวก ส่วนการโก่งตัวที่ระยะ z เป็นลบ หาได้จากการแทนค่า z ด้วย -z ลงในสมการที่ 4-12 ค่าความชัน โมนเมนต์ดัด และแรงเฉือนที่เกิดขึ้นในคานได้จากการแทนสมการที่ 4-12 ลงในสมการที่ 4-1a ถึง สมการที่ 4-1c และเขียนได้ดังนี้

$$y = \frac{P\beta}{2k} A_{\beta z} \qquad z \geq 0 \tag{4-13}$$

$$\theta = -\frac{P\beta^2}{k} B_{\beta z} \qquad z \geq 0 \tag{4-14}$$

$$M_H = \frac{P}{4\beta} C_{\beta z} \qquad z \geq 0 \tag{4-15}$$

$$V_y = -\frac{P}{2} D_{\beta z} \qquad z \geq 0 \tag{4-16}$$

โดยที่

$$\left.\begin{aligned} A_{\beta z} &= e^{-\beta z}(\sin\beta z + \cos\beta z) \\ B_{\beta z} &= e^{-\beta z}\sin\beta z \\ C_{\beta z} &= e^{-\beta z}(\cos\beta z - \sin\beta z) \end{aligned}\right\} \tag{4-17}$$

$$D_{\beta z} = e^{-\beta z}\cos\beta z$$

ค่าของ $A_{\beta z}$, $B_{\beta z}$ $C_{\beta z}$ และ $D_{\beta z}$ แสดงไว้ในตารางที่ 4.1 ซึ่งค่าของ β อยู่ระหว่าง $0 \leq \beta \leq 5\pi/2$

โดยอาศัยเงื่อนไขความสมมาตร ทำให้ค่าของความชัน โมเมนต์ดัดและแรงเฉือนที่ตำแหน่งต่างๆ ในคาน หาได้จาก

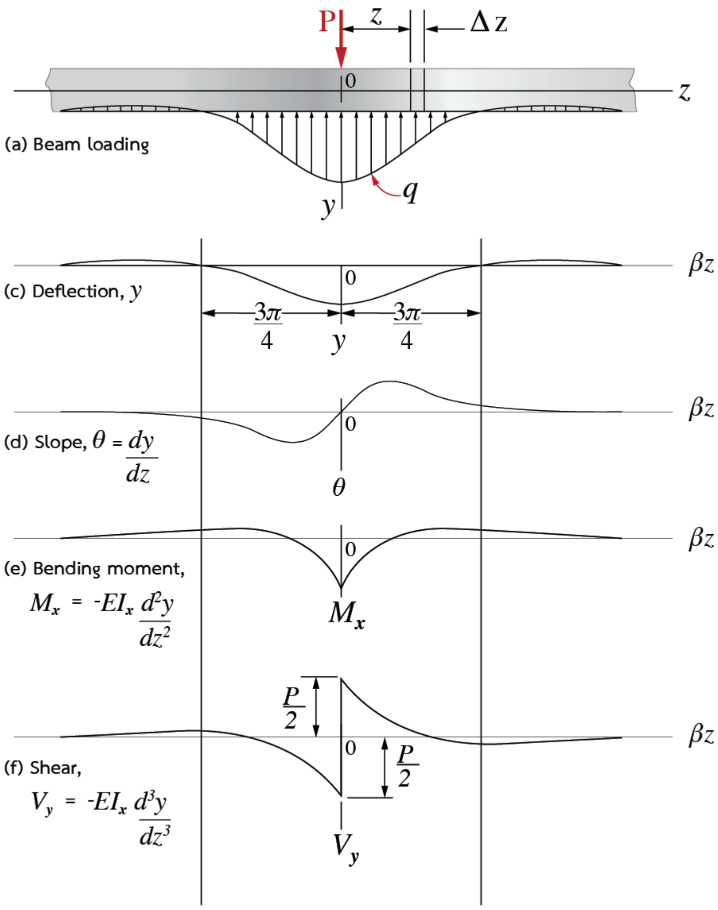
$$\theta(-z) = -\theta(z)$$

$$M_z(-z) = M_z(z)$$

$$V_y = -V_y(z)$$

ค่าต่างๆ เขียนแสดงให้เห็นได้ดังรูปข้างล่าง จากรูปที่ 4-3 ซึ่งพบว่าค่าเหล่านี้เข้าใกล้ศูนย์ เมื่อ βz มีค่ามาก สมการที่ 4-13 ถึงสมการที่ 4-16 จึงใช้เป็นค่าประมาณของคานที่มีความยาวจำกัด (finite length) จากตารางที่ 4.1 พบว่า $A_{\beta z} = 0$ เมื่อ $\beta z = 3\pi/4$ นั่นหมายความว่า

ที่ระยะ $z = \dfrac{3\pi}{4\beta}$ จากตำแหน่งที่แรงกระทำ $y = 0$ ดังนั้น คานที่มีความยาว $L = \dfrac{3\pi}{2\beta}$ ที่มีแรงกระทำที่กึ่งกลางความยาวอนันต์ร้อยละ 1.9 ความผิดพลาดที่เกิดขึ้นจะมากกว่า แต่ไม่มากจนเกินไป ดังนั้น คานที่มีความยาวอนันต์ อาจแทนได้ด้วยคานที่มีความยาวจำกัดเท่ากับ $L = \dfrac{3\pi}{2\beta}$ เมื่อแรงกระทำที่กึ่งกลางความยาวคาน



รูปที่ 4-3 พฤติกรรมที่เกิดขึ้นกับคานบนฐานรากยืดหยุ่น

ตารางที่ 4.1 ค่าคงที่ในสมการที่ 4-17

βz	$A_{\beta z}$	$B_{\beta z}$	$C_{\beta z}$	$D_{\beta z}$
0	1.0000	0.0000	1.0000	1.0000
0.001	1.0000	0.0010	0.9980	0.9990
0.002	1.0000	0.0020	0.9960	0.9980
0.003	1.0000	0.0030	0.9940	0.9970
0.004	1.0000	0.0040	0.9920	0.9960
0.005	1.0000	0.0050	0.9900	0.9950
0.006	1.0000	0.0060	0.9880	0.9940
0.007	1.0000	0.0070	0.9860	0.9930
0.008	0.9999	0.0079	0.9841	0.9920
0.009	0.9999	0.0089	0.9821	0.9910
0.01	0.9999	0.0099	0.9801	0.9900
0.011	0.9999	0.0109	0.9781	0.9890
0.012	0.9999	0.0119	0.9761	0.9880
0.013	0.9998	0.0128	0.9742	0.9870
0.014	0.9998	0.0138	0.9722	0.9860
0.015	0.9998	0.0148	0.9702	0.9850
0.016	0.9997	0.0157	0.9683	0.9840
0.017	0.9997	0.0167	0.9663	0.9830
0.018	0.9997	0.0177	0.9643	0.9820
0.019	0.9996	0.0186	0.9624	0.9810
0.02	0.9996	0.0196	0.9604	0.9800
0.03	0.9991	0.0291	0.9409	0.9700
0.04	0.9984	0.0384	0.9216	0.9600
0.05	0.9976	0.0475	0.9025	0.9500
0.10	0.9907	0.0903	0.8100	0.9003
0.15	0.9797	0.1286	0.7224	0.8510
0.20	0.9651	0.1627	0.6398	0.8024
0.25	0.9473	0.1927	0.5619	0.7546
0.30	0.9267	0.2189	0.4888	0.7077
0.35	0.9036	0.2416	0.4203	0.6620
0.40	0.8784	0.2610	0.3564	0.6174
0.45	0.8515	0.2773	0.2968	0.5742
0.50	0.8231	0.2908	0.2415	0.5323
0.55	0.7934	0.3016	0.1903	0.4919
0.60	0.7628	0.3099	0.1431	0.4530
0.65	0.7315	0.3159	0.0997	0.4156
0.70	0.6997	0.3199	0.0599	0.3798
0.75	0.6676	0.3220	0.0236	0.3456
$1/4\ \pi$	0.6448	0.3224	0.0000	0.3224
0.80	0.6354	0.3223	-0.0093	0.3131
0.85	0.6032	0.3211	-0.0390	0.2821

ตารางที่ 4.1 (ต่อ)

βz	$A_{\beta z}$	$B_{\beta z}$	$C_{\beta z}$	$D_{\beta z}$
0.90	0.5712	0.3185	-0.0657	0.2527
0.95	0.5395	0.3146	-0.0896	0.2250
1.00	0.5083	0.3096	-0.1108	0.1988
1.05	0.4777	0.3035	-0.1294	0.1741
1.10	0.4476	0.2967	-0.1457	0.1510
1.15	0.4184	0.2890	-0.1597	0.1293
1.20	0.3899	0.2807	-0.1716	0.1091
1.25	0.3622	0.2719	-0.1815	0.0903
1.30	0.3355	0.2626	-0.1897	0.0729
1.35	0.3097	0.2529	-0.1962	0.0568
1.40	0.2849	0.2430	-0.2011	0.0419
1.45	0.2611	0.2329	-0.2046	0.0283
1.50	0.2384	0.2226	-0.2068	0.0158
1.55	0.2166	0.2122	-0.2078	0.0044
$1/2\ \pi$	0.2079	0.2079	-0.2079	0.0000
1.60	0.1959	0.2018	-0.2077	-0.0059
1.65	0.1763	0.1914	-0.2066	-0.0152
1.70	0.1576	0.1812	-0.2047	-0.0235
1.75	0.1400	0.1710	-0.2020	-0.0310
1.80	0.1234	0.1610	-0.1985	-0.0376
1.85	0.1078	0.1511	-0.1945	-0.0433
1.90	0.0932	0.1415	-0.1899	-0.0484
1.95	0.0795	0.1322	-0.1848	-0.0527
2.00	0.0667	0.1231	-0.1794	-0.0563
2.05	0.0549	0.1142	-0.1736	-0.0594
2.10	0.0439	0.1057	-0.1675	-0.0618
2.15	0.0337	0.0975	-0.1612	-0.0638
2.20	0.0244	0.0896	-0.1548	-0.0652
2.25	0.0158	0.0820	-0.1482	-0.0662
2.30	0.0080	0.0748	-0.1416	-0.0668
2.35	0.0008	0.0679	-0.1349	-0.0670
$3/4\ \pi$	0.0000	0.0670	-0.1340	-0.0670
2.40	-0.0056	0.0613	-0.1282	-0.0669
2.45	-0.0114	0.0550	-0.1215	-0.0665
2.50	-0.0166	0.0491	-0.1149	-0.0658
2.55	-0.0213	0.0435	-0.1084	-0.0648
2.60	-0.0254	0.0383	-0.1019	-0.0636
2.65	-0.0289	0.0333	-0.0956	-0.0623
2.70	-0.0320	0.0287	-0.0895	-0.0608
2.75	-0.0347	0.0244	-0.0835	-0.0591
2.80	-0.0369	0.0204	-0.0777	-0.0573

ตารางที่ 4.1 (ต่อ)

βz	$A_{\beta z}$	$B_{\beta z}$	$C_{\beta z}$	$D_{\beta z}$
2.85	-0.0388	0.0166	-0.0720	-0.0554
2.90	-0.0403	0.0132	-0.0666	-0.0534
2.95	-0.0414	0.0100	-0.0613	-0.0514
3.00	-0.0423	0.0070	-0.0563	-0.0493
3.05	-0.0428	0.0043	-0.0515	-0.0472
3.10	-0.0431	0.0019	-0.0469	-0.0450
. π	-0.0432	0.0000	-0.0432	-0.0432
3.15	-0.0432	-0.0004	-0.0425	-0.0429
3.20	-0.0431	-0.0024	-0.0383	-0.0407
3.25	-0.0427	-0.0042	-0.0344	-0.0385
3.30	-0.0422	-0.0058	-0.0306	-0.0364
3.35	-0.0416	-0.0073	-0.0271	-0.0343
3.40	-0.0408	-0.0085	-0.0237	-0.0323
3.45	-0.0399	-0.0096	-0.0206	-0.0302
3.50	-0.0389	-0.0106	-0.0177	-0.0283
3.55	-0.0378	-0.0114	-0.0150	-0.0264
3.60	-0.0366	-0.0121	-0.0124	-0.0245
3.65	-0.0354	-0.0127	-0.0101	-0.0227
3.70	-0.0341	-0.0131	-0.0079	-0.0210
3.75	-0.0327	-0.0134	-0.0059	-0.0193
3.80	-0.0314	-0.0137	-0.0040	-0.0177
3.85	-0.0300	-0.0138	-0.0023	-0.0162
3.90	-0.0286	-0.0139	-0.0008	-0.0147
5/4 π	-0.0279	-0.0139	0.0000	-0.0139
3.95	-0.0272	-0.0139	0.0006	-0.0133
4.00	-0.0258	-0.0139	0.0019	-0.0120
4.05	-0.0245	-0.0137	0.0030	-0.0107
3/2 π	-0.0090	-0.0090	0.0090	0.0000
5.00	-0.0045	-0.0065	0.0084	0.0019
7/4 π	0.0000	-0.0029	0.0058	0.0029
5.50	0.0000	-0.0029	0.0058	0.0029
6.00	0.0017	-0.0007	0.0031	0.0024
2 π	0.0019	0.0000	0.0019	0.0019
6.50	0.0018	0.0003	0.0011	0.0015
7.00	0.0013	0.0006	0.0001	0.0007
9/4 π	0.0012	0.0006	0.0000	0.0006
7.50	0.0007	0.0005	-0.0003	0.0002
5/2 π	0.0004	0.0004	-0.0004	0.0000

ตัวอย่างที่ 4.1

คานเหล็กรูปตัว I มีค่า E = 200 GPa กว้าง 76 mm หนา 127 mm $I_x = 5.12 \times 10^6$ mm^4 ยาว 4 m คานนี้วางอยู่บนฐานรากทำด้วยยางที่มีค่าคงที่ของสปริง k_0 = 0.270 N/mm^3 บนคานมีแรง P = 60 kN กระทำที่กึ่งกลางความยาว จงคำนวณหาค่าการโก่งตัวสูงสุด และความเค้นสูงสุดที่เกิดขึ้นในคาน

วิธีทำ

ค่าสัมประสิทธิ์ของสปริงของฐานราก คำนวณได้จาก

$$k = k_0 b$$

$$= 0.270 \times 76 \quad = 20.52 \text{ N/mm}^2$$

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI_x}} \quad = \sqrt[4]{\frac{20.52}{4\times 200\times 10^3 \times 5.12\times 10^6}}$$

$$= 1.496\times 10^{-3} \text{ mm}^{-1}$$

ค่าการโก่งตัวสูงสุดและการดัดสูงสุดเกิดตรงตำแหน่งที่แรง P กระทำ นั่นคือ

$$\beta z = 0 \Rightarrow A_{\beta z} = C_{\beta z} = 1$$

$$\therefore \quad y_{max} = \frac{P\beta}{2k}$$

$$= \frac{60\times 10^3 \times 1.496\times 10^{-3}}{2\times 20.52}$$

$$= 2.187 \text{ mm}$$

$$M_{max} = \frac{P}{4\beta}$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}C}{I_x} \quad = \frac{\left(\frac{P}{4\beta}\right)C}{I_z}$$

$$= \frac{60\times 10^3}{4\times 1.496\times 10^{-3}} \times \frac{\left(\frac{127}{2}\right)}{5.12\times 10^6}$$

$$= 124.36 \text{ MPa}$$

ตัวอย่างที่ 4.2

รางรถไฟเหล็กมีค่า E = 200 GPa หนา 184 mm ระยะจากด้านบนของรางถึงจุดศูนย์ถ่วงของหน้าตัดเท่ากับ 90.1 mm ค่า $I_x = 36.9 \times 10^6$ mm^4 รางรถไฟวางอยู่บนฐานรากยืดหยุ่นที่มีค่าคงที่ของสปริง k = 14 N/mm^2

i) จงคำนวณหาการโก่งตัวสูงสุด และโมเมนต์ดัดสูงสุด ตลอดจนความเค้นดัดสูงสุดที่เกิดขึ้นในรางรถไฟเมื่อล้อรถไฟล้อเดียวหนัก 170 kN วางอยู่บนคาน

ii) ถ้ารถไฟมี 3 ล้อ วางอยู่ห่างกันเป็นระยะเท่ากัน เท่ากับ 1.70 m จงคำนวณหาการโก่งตัวสูงสุด และโมเมนต์ดัดสูงสุด และความเค้นดัดสูงสุดที่เกิดขึ้นในราง ถ้าน้ำหนักของแต่ละล้อหนัก 170 kN

วิธีทำ

i) กรณีของล้อเดียว $P = 170 \text{ kN}$

$$\because \qquad \beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI_Z}} = \sqrt{\frac{14}{4\times 200\times 10^3\times 36.9\times 10^6}}$$

$$= 0.00083 \text{ mm}^{-1}$$

ตำแหน่งที่เกิดการโก่งตัวสูงสุด และโมเมนต์ดัดสูงสุด อยู่ที่ $\beta z = 0$

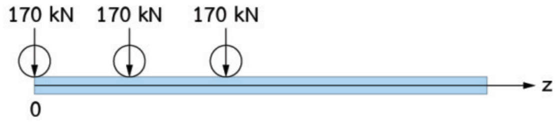
$$\therefore \qquad Y_{max} = \frac{P\beta}{2k} = \frac{170\times 10^3\times(0.00083)}{2\times 14} = 5.039 \text{ MPa}$$

$$M_{max} = \frac{P}{4\beta} = \frac{170\times 10^3}{4\times 0.00083} = 51.21 \text{ kN}\cdot\text{mm}$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}C}{I_z} = \frac{51.21\times 10^6\times 99.1}{36.9\times 10^6} = 137.5 \text{ MPa}$$

ii) กรณีที่รถไฟมี 3 ล้อที่หนักเท่าๆ กัน 170 kN และห่างเท่าๆ กัน 1.70 m การหาการโก่งตัวและโมเมนต์ดัด กระทำได้โดยวิธีการซ้อนกันของแต่ละล้อ ซึ่งอาจพิจารณาได้เป็น 2 กรณีดังนี้

กรณีที่ 1 $\Rightarrow$



กรณีที่ 2 $\Rightarrow$

กรณีที่ 1) ให้ล้อแรก (หรือล้อสุดท้าย) วางอยู่ที่จุดกำเนิดระยะทาง z_1 และ z_2 ของล้อถัดไป 2 ล้อ เท่ากับ 1.7×10^3 mm และ $z_2 = 3.4 \times 10^3$ mm

$$\beta z_1 = 0.00083 \times 1.7 \times 10^3 = 1.411$$

$$\beta z_2 = 0.00083 \times 3.4 \times 10^3 = 2.822$$

ได้จากตาราง 4.1
$$\left\{ \begin{aligned} A_{\beta z_1} &= 0.2797 \\ C_{\beta z_1} &= -0.2018 \end{aligned} \right.$$

$$A_{\beta z_2} = -0.0377$$

$$C_{\beta z_2} = -0.0752$$

การโก่งตัวและโมเมนต์ดัดที่ใต้จุดกำเนิดใต้ล้อแรก (หรือล้อสุดท้าย) หาได้จาก

$$Y_{end} = \frac{P\beta}{2k}(A_{\beta z_0} + A_{\beta z_1} + A_{\beta z_2})$$

$$= 5.039(1 + 0.2797 - 0.0377) = 6.258\,\text{mm}$$

$$M_{end} = \frac{P}{4\beta}(C_{\beta z_0} + C_{\beta z_1} + C_{\beta z_2})$$

$$= 51.21 \times 10^6 (1 - 0.2018 - 0.0752) = 37.02\,\text{kN.m}$$

กรณีที่ 2) ให้ล้อกลางวางอยู่ที่จุดกำเนิด ฉะนั้นระยะทางระหว่างล้อปลายทั้งสองเท่ากัน เท่ากับ 1.7×10^3 mm ดังนั้น

$$Y_{center} = \frac{P\beta}{2k}(A_{\beta z_0} + 2A_{\beta z_1})$$

$$= 5.039(1+2\times 0.2797) = 7.858\text{mm}$$

$$M_{center} = \frac{P}{4\beta}(C_{\beta z_0} + 2C_{\beta z_1})$$

$$= 51.21\times 10^6(1-2\times 0.2018) = 30.54\text{kN.m}$$

จากทั้งสองกรณี พบว่า

กรณี 2) $Y_{center} = Y_{max} = 7.858$

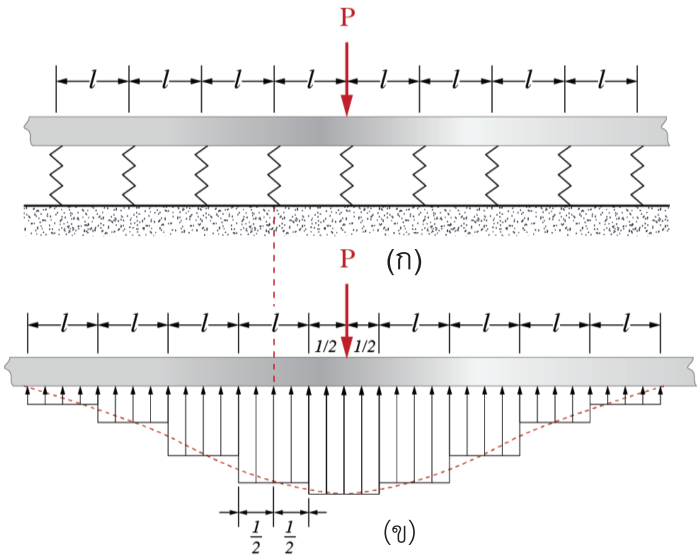
กรณี 1) $M_{end} = M_{max} = 37.02\text{kN.m}$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}C}{I_z} = \frac{37.02\times 10^6 \times 99.1}{36.9\times 10^6}$$

$$= 99.4\,\text{MPa}$$

4.3 คานรองรับด้วยสปริงที่วางห่างเป็นระยะเท่าๆ กัน

คานที่ยาวมากบางกรณีถูกรองรับไว้ด้วยสปริงจำนวนมากที่วางห่างกันเป็นระยะเท่าๆ กันตลอดความยาวคาน (beam supported on equally spaced separate elastic supports) ดังแสดงในรูปที่ 4-4



รูปที่ 4-4 การตอบสนองของคานรองรับโดยสปริง

ถึงแม้รูปที่แสดงเป็นการรองรับแบบสปริง แต่สปริงแต่ละตัวอาจหมายถึงชิ้นส่วนที่ยืดหยุ่นแบบเชิงเส้น หรือชิ้นส่วนของโครงสร้าง เช่น ชิ้นส่วนรับแรงดึง คานตรงก็ได้ โดยทั่วไปการคำนวณหาการโก่งตัวอาจใช้วิธีการพลังงานที่ให้คำตอบถูกต้อง แต่อย่างไรก็ตาม ถ้าสปริงมีจำนวนมากๆ การใช้วิธีพลังงานจะเสียเวลามาก ดังนั้นวิธีการประมาณทำได้โดยประหยัดเวลากว่า

วิธีการดังกล่าวกระทำได้ดังนี้ สมมติว่าสปริงแต่ละตัวมีค่าคงที่เท่ากับ K แรง R ที่กระทำบนสปริง มีสัดส่วนโดยตรงกับระยะโก่งตัว y ดังนั้น

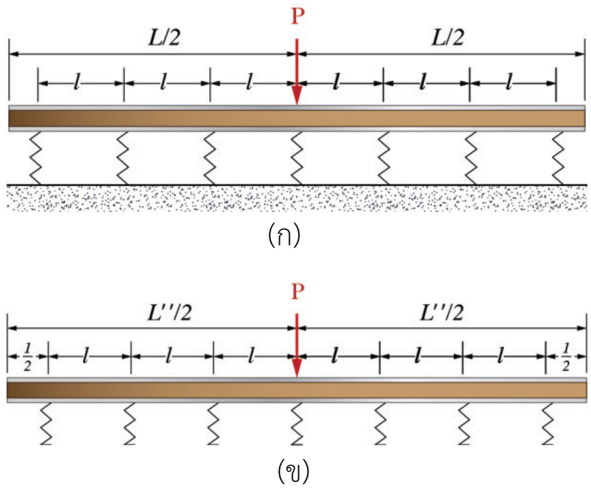
$$R = Ky \tag{4-18}$$

โดยสมมติว่าแรง R กระจายอย่างสม่ำเสมอตลอดช่วงกว้าง l หรือครอบคลุมระยะ $\frac{l}{2}$ ทั้งทางขวาและซ้ายของสปริงแต่ละตัว ดังนั้นการกระจายของแรงเป็นแบบขั้นบันได ดังแสดงในรูป ถ้าให้เส้นประแสดงถึงค่าเฉลี่ยของแรงกระจายแบบเป็นขั้น เนื่องจากเส้นประตัดที่ตรงกึ่งกลางของแต่ ละขั้น จึงเสมือนเส้นโค้งประนี้ตัดกับขั้นบันไดใต้ตำแหน่งของสปริง ดังนั้น จึงอาจสมมติให้ k ซึ่งเป็นค่าคงที่สปริงเทียบเท่าแทนได้ด้วย

$$k = \frac{K}{l} \tag{4-19}$$

โดยการแทนค่า k กลับลงไปในสมการที่ 4-5 ก็จะให้ค่าของ β ที่สอดคล้องกัน ดังนั้นการหาค่า y, θ, M_z และ V_y ก็ทำได้โดยใช้สมการที่ 4-13 ถึงสมการที่ 4-16 ซึ่งยังคงใช้ได้สำหรับคานที่มีความยาวอนันต์ ถูกรองรับไว้ด้วยสปริงที่วางห่างเท่าๆ กัน และมีแรงกระทำที่กึ่งกลางความยาวคาน ค่าประมาณที่ได้จะถูกต้องมากขึ้น ถ้าหากระยะ l มีค่าน้อยๆ แต่ถ้า l มีค่ามาก ค่าผิดพลาดจะมากตามไปด้วย ดังนั้น ความผิดพลาดจะไม่มากเกินไปถ้าหากระยะ l ระหว่างสปริงแต่ละตัวถูกกำหนดไว้ด้วย

$$l \leq \frac{\pi}{4\beta} \tag{4-20}$$



รูปที่ 4-5 ระยะห่างของสปริง

ดังนั้น คำตอบประมาณของคานที่มีความยาวอนันต์ ถูกรองรับไว้ด้วยสปริงที่วางห่างกันเป็นระยะเท่าๆ กัน อาจนำไปใช้หาคำตอบประมาณที่เชื่อถือได้ของคานที่มีความยาวจำกัดเพียงพอ ส่วนการกระจายของแรงในสปริงถูกสมมติว่าสม่ำเสมอตลอดช่วงระยะ l หรือเป็นการกระจายอย่างสม่ำเสมอตลอดระยะ $\frac{l}{2}$ ไปทางซ้ายและขวาของสปริง โดยพิจารณาคานอันหนึ่งที่มีความยาว L รองรับด้วยสปริงเป็นช่วงๆ ดังในรูป โดยทั่วไปสปริงที่อยู่ปลายจะไม่อยู่ในตำแหน่ง $\frac{l}{2}$ จากปลายพอดี แต่จะวางห่างเป็นระยะน้อยกว่า $\frac{l}{2}$ จากปลายคานทั้งสอง ดังนั้น เพื่อให้ผลของการกระจายเป็นไปอย่างสม่ำเสมอ จึงสมมติว่าความยาวที่ปลายทั้งสองของคานยื่นออกไปเป็นระยะ $\frac{l}{2}$ ทำให้ความยาว L กลายเป็น L''

$$\therefore \qquad L'' = ml \tag{4-21}$$

ในที่นี้ m เป็นจำนวนสปริงที่รองรับ ถ้า $L'' \geq \frac{3\pi}{2\beta}$ แล้ว คำตอบประมาณของคานที่ยาวอนันต์รองรับด้วยสปริง ให้ค่าค่อนข้างดีสำหรับคานที่ยาว L รองรับด้วยสปริง

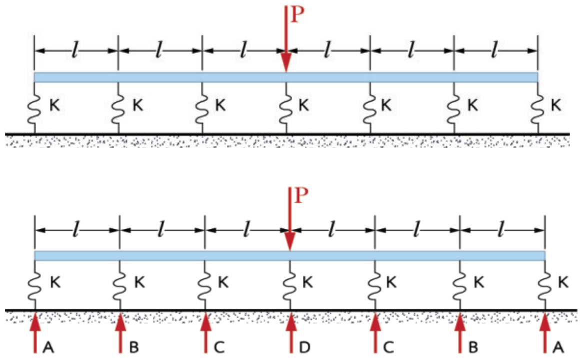
ตัวอย่างที่ 4.3

คานรูปตัว I ทำด้วยโลหะอลูมิเนียมผสม หนา 100 mm, $I_x = 2.45 \times 10^6$ mm^4 E = 72 GPa ความยาว L = 6.8 m คานถูกรองรับด้วยสปริงทั้งหมด 7 ตัว (K = 110 N/mm) วางห่างกันด้วยระยะ l = 1.10 m ที่กึ่งกลางของความยาวคานมีแรง P = 12 kN กระทำตรงกลางคาน จงคำนวณหา

i) แรงที่สปริงรับได้

ii) การโก่งตัวของคานที่จุดใต้แรงกระทำ

iii) โมเมนต์ดัดสูงสุด และความเค้นในคาน และเปรียบเทียบผลที่ได้จากวิธีการพลังงาน



รูปตัวอย่างที่ 4.3

วิธีทำ

คำนวณหาค่าของ β โดย $\beta = \sqrt[4]{\dfrac{k}{4EI_x}}$

ในที่นี้ $k = \dfrac{K}{l} = \dfrac{110}{1.1\times10^3} = 0.100\ \text{N/mm}^2$

$$\therefore \quad \beta = \sqrt[4]{\frac{0.100}{4\times72\times10^3\times2.45\times10^6}} = 0.000614\ \text{mm}^{-1}$$

หาค่าจำกัดของ l และ L″

$$\because \quad l = 1.10\times10^3 < \frac{\pi}{4\beta} = \frac{\pi}{4\times0.000614} = 1279\ \text{mm} \quad \text{OK}$$

$$L'' = ml = 7\times1.1\times10^3 = 7700\ \text{mm}$$

$$\frac{3\pi}{2\beta} = \frac{3\pi}{2\times0.000614} = 7675$$

$$\therefore \quad L'' > \frac{3\pi}{2\beta} \quad \text{OK}$$

ค่าความโก่งตัวสูงสุด และโมเมนต์ดัดสูงสุดที่เกิดขึ้นตำแหน่งใต้แรง P

$$\therefore \quad A_{\beta z} = C_{\beta z} = 1$$

$$\therefore \quad y_{max} = \frac{P\beta}{2k} = \frac{12\times10^3\times0.000614}{2\times0.100} = 36.84\,\text{mm}$$

$$M_{max} = \frac{P}{4\beta} = \frac{12\times10^3}{4\times0.000614} = 4.886\times10^6\ \text{N}\cdot\text{mm}$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}C}{I_x} = 99.7\,\text{MPa}$$

ค่า βz ของสปริงตัวที่ 1, 2 และ 3 จากซ้ายและขวาของแรง P คือ

$$\beta l = 0.6754,\ 2\beta l = 1.3508,\ 3\beta l = 2.0562$$

จากตารางได้ $A_{\beta l} = 0.7153,\ A_{2\beta l} = 0.3094,\ A_{3\beta l} = 0.0605$

ดังนั้นการโก่งตัวที่เกิดขึ้นใต้สปริง C, B และ A หาได้ดังนี้

$$y_C = \frac{P\beta}{2k}A_{\beta l} = 36.84\times0.7153 = 26.35\,\text{mm}$$

$$y_B = \frac{P\beta}{2k}A_{2\beta l} = 36.84\times0.3094 = 11.40\,\text{mm}$$

$$y_A = \frac{P\beta}{2k}A_{3\beta l} = 36.84\times0.0605 = 2.23\,\text{mm}$$

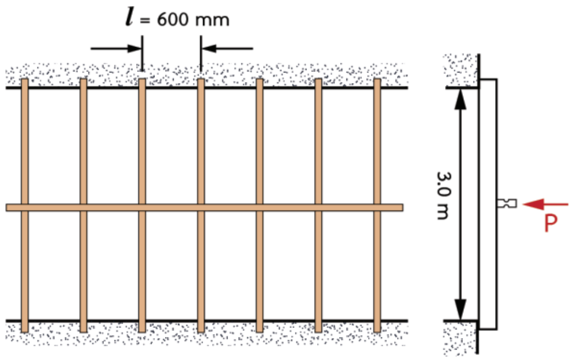
แรงที่เกิดขึ้นในสปริงแต่ละตัวหาได้จาก R = Ky ผลที่ได้คำตอบประมาณเปรียบเทียบกับคำตอบที่ถูกต้องโดยวิธีการพลังงานได้แสดงในตารางข้างล่าง

ตารางที่ 4.2 ตารางการเปรียบเทียบผลจากการวิเคราะห์วิธีการพลังงานและคำตอบประมาณ

ผลการคำนวณ	คำตอบแท้จริง (วิธีการพลังงาน)	คำตอบประมาณ
R_A	-454 N	245 N
R_B	1216 N	1254 N
R_C	3094 N	2899 N
R_D	4288 N	4052 N
M_{max}	4.580 kN.m	4.886 kN.m
y_{max}	38.98 mm	36.84 mm

ตัวอย่างที่ 4.4

ระบบคานดังแสดงในรูปตัวอย่างที่ 4.4 มีคานตามความยาววางทับคานขวาง คานทั้งหมดเป็นรูปตัว I หนา 203 mm, $I_x = 24 \times 10^6\ mm^4$, E = 200 GPa คานมีความยาวเท่ากับ 3.0 m และมีระยะห่างระหว่างคานขวางเท่ากับ l = 600 mm, แรง P = 90 kN กระทำที่กึ่งกลางของคานตามยาว จงคำนวณหาโมเมนต์สูงสุดที่เกิดขึ้นในคานตามยาวและคานขวาง



รูปตัวอย่างที่ 4.4

วิธีทำ

ค่าคงที่ของสปริงของคานขวาง หาได้จาก

$$k_{\text{คานขวาง}} = \frac{K}{l}$$

ในที่นี้ K เป็นค่าคงที่ของคานขวาง เนื่องจากแรง P กระทำตรงกลาง

$$K = \frac{48EI_x}{L^3}$$

$$\therefore \quad k_{\text{คานขวาง}} = \frac{\left(\frac{48EI_x}{L^3}\right)}{l}$$

$$= \frac{48 \times 200 \times 10^3 \times 24 \times 10^6}{(3 \times 10^3)^3 \times 0.6 \times 10^3} = 14.22\ \mathrm{N/mm^2}$$

$$\therefore \quad \beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI_x}} = \sqrt{\frac{14.22}{4 \times 200 \times 10^3 \times 24 \times 10^6}} = 0.9276 \times 10^{-3}$$

ตรวจสอบค่า $l\ ; \quad l \le \frac{\pi}{4\beta} \quad \because \quad \frac{\pi}{4\beta} = \frac{4}{4 \times 0.9276} \times 10^3 = 846.33\ \mathrm{mm}$

$$\therefore \quad 600 \le 846.33 \quad \text{OK}$$

สำหรับคานความยาว $M_{max} = \frac{P}{4\beta}$

$$\sigma_{max} = \frac{\left(\frac{P}{4\beta}\right)C}{I_x} = \frac{\left(\frac{90\times10^3}{4\times0.9276\times10^3}\right)\times\frac{203}{2}}{24\times10^6}$$

$$= 102.58\,\text{MPa}$$

สำหรับคานตามยาว $y_{max} = \frac{P\beta}{2k} = \frac{90\times10^3\times0.9276\times10^{-3}}{2\times14.22} = 2.935\text{mm}$

แรงปฏิกิริยาที่ถ่ายลงในคานขวาง

$$R = Ky$$

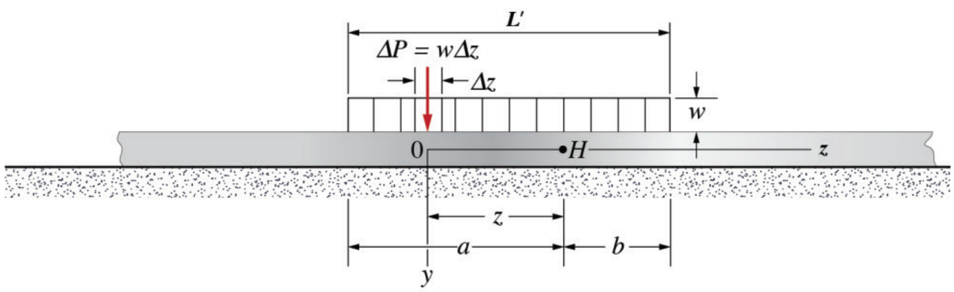
$$= (14.22\times0.6\times10^3)\times2.935 = 25.04\times10^3\,\text{N}$$

$$M_{max} = \frac{RL}{4} = \frac{25.04\times10^3\times3\times10^3}{4}$$

$$\sigma_{max} = \frac{25.04\times10^3\times3\times10^3}{4}\times\frac{101.5}{24\times10^6} = 79.42\,\text{MPa}$$

4.4 คานยาวอนันต์รับน้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอ

คานที่มีความยาวมากๆ อาจพิจารณาเสมือนคานที่มีความยาวอนันต์ในกรณีเช่นนี้อาจวิเคราะห์โดยพิจารณาคานที่ยาวอนันต์ (infinite beam) อันหนึ่งวางอยู่บนที่รองรับที่ยาวอนันต์เช่นกัน บนคานนี้มีน้ำหนักกระจายแบบสม่ำเสมอเท่ากับ w กระทำในช่วงคานยาว L' หรือเรียกว่า คานยาวอนันต์รับน้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอ (infinite beam subjected to a distributed load segment) ดังแสดงในรูป



รูปที่ 4-6 แรงกระทำกระจายสม่ำเสมอ

คำตอบที่ได้จากสมการที่ 4-12 สามารถนำไปใช้หาการโก่งตัว ความชัน โมเมนต์ดัด และแรงเฉือนของคาน และเพราะว่าค่าสูงสุดของค่าเหล่านี้ โดยทั่วไปเกิดอยู่ในช่วงความยาว L' คำตอบที่ได้จึงอยู่ในช่วง L' ด้วย

พิจารณาชิ้นส่วนที่มีความยาวเล็กๆ Δz ที่อยู่ช่วงความยาว L' แรง ΔP เท่ากับ $w\Delta z$ กระทำที่ตรงช่วงเล็กๆ Δz ซึ่งแรง ΔP เป็นเสมือนแรงแบบจุด ตำแหน่งที่อยู่ใต้แรง P ให้เป็นจุดกำเนิดของพิกัด และพิจารณาตำแหน่งใดๆ H ที่อยู่ห่างจากจุดกำเนิดเป็นระยะ z จากรูปพบว่า จุด H มีระยะทางห่างจากปลายข้างซ้ายและข้างขวาของช่วง L' เป็นระยะ a และ b ตามลำดับ การโก่งตัว Δy_H ที่จุด H เนื่องจากแรง $\Delta P = w\Delta z$ หาได้จากสมการที่ 4-12 โดยแทน P ด้วย $\Delta P = w\Delta z$ ดังนั้นจะได้

$$\because \qquad \Delta y_H = \frac{w\Delta z}{2k}\beta e^{-\beta z}(\cos\beta z + \sin\beta z) \tag{4-22}$$

การโก่งตัวที่เกิดขึ้นทั้งหมดเนื่องจากแรงกระจายตลอดช่วงความยาว L' หาได้โดยการกระทำซ้อน นั่นคือ การรวมตัวของชิ้นส่วน Δz ตลอดช่วง L'

$$\because \qquad \frac{\Delta y_H}{\Delta z} = \frac{w\beta e^{-\beta z}}{2k}(\cos\beta z + \sin\beta z)$$

$$\lim_{\Delta z \to o}\frac{\Delta y_H}{\Delta z} = \frac{dy_H}{dz} = \frac{w\beta e^{-\beta z}}{2k}(\cos\beta z + \sin\beta z)$$

$$\therefore \qquad \int dy_H = \int \frac{w\beta e^{-\beta z}}{2k}(\cos\beta z + \sin\beta z)dz$$

$$y_H = \int_0^a \frac{w\beta e^{-\beta z}}{2k}(\cos\beta z + \sin\beta z)dz + \int_0^b \frac{w\beta e^{-\beta z}}{2k}(\cos\beta z + \sin\beta z)dz$$

$$y_H = \frac{w}{2k}(2 - e^{-\beta a}\cos\beta a - e^{-\beta b}\cos\beta b) \tag{4-23}$$

ดังนั้น ค่าของความชัน โมเมนต์ดัด และแรงเฉือนที่จุด P ก็หาได้โดยการอนุพันธ์กับ y และการใช้สมการที่ 4-17 ทำให้เขียนเทอม y_H, θ_H, M_H และ V_H ได้ดังนี้

$$y_H = \frac{w}{2k}(2 - D_{\beta a} - D_{\beta b}) \tag{4-24}$$

$$\theta_H = \frac{w\beta}{2k}(A_{\beta a} - A_{\beta b}) \tag{4-25}$$

$$M_H = \frac{w}{4\beta^2}(B_{\beta a} + B_{\beta b}) \tag{4-26}$$

$$V_H = \frac{w}{4\beta}(C_{\beta a} - C_{\beta b}) \tag{4-27}$$

โดยทั่วไปค่าสูงสุดของการโก่งตัวและโมเมนต์ดัดเป็นค่าที่น่าสนใจที่สุด ค่าสูงสุดของการโก่งตัวเกิดขึ้นที่กึ่งกลางของช่วงความยาว L' ส่วนค่าสูงสุดของโมเมนต์ดัดอาจเกิดหรือไม่เกิดขึ้นที่กึ่งกลางช่วง L' ก็ได้ ส่วนตำแหน่งที่เกิดขึ้นอยู่กับค่า $\beta L'$ ซึ่งพิจารณาได้ 3 กรณี ดังแสดงในรูปที่ 4-7 คือ

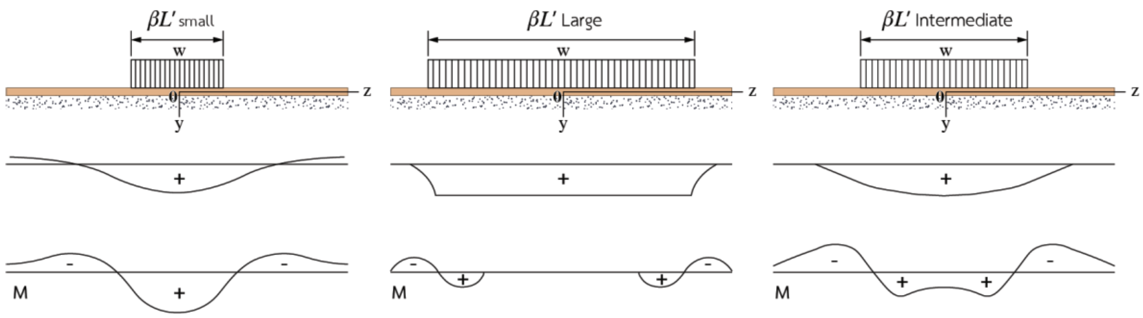
a) $\beta L' \le \pi$ กรณีโมเมนต์ดัดสูงสุดเกิดขึ้นที่กึ่งกลางความยาว L'

b) $\beta L' \to \alpha$ (เข้าใกล้ค่าอนันต์) ทำให้

$$\theta \to 0, M_x \to 0,\ V_y \to 0,\ \text{และ}\quad y \to \frac{w}{k}$$

ทุกๆ จุด ยกเว้นบริเวณใกล้ระยะ L' กรณีนี้เกิดขึ้นที่ βa หรือ βb มีระยะเท่ากับ $\frac{\pi}{4}$

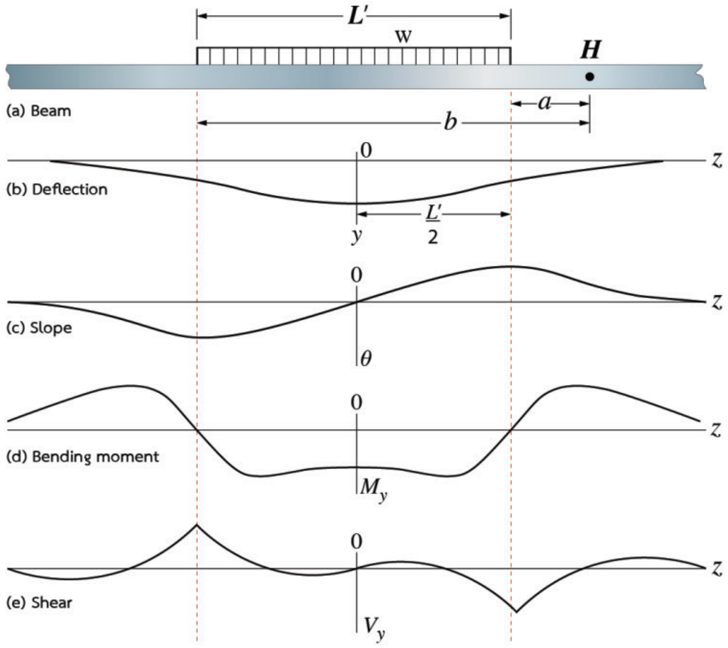
c) $\pi < \beta L' < \alpha$ (intermediate values) ตำแหน่งที่เกิดโมเมนต์ดัดสูงสุดอยู่นอกช่วงความยาว L' ซึ่งหาได้โดยใช้วิธีลองผิดลองถูก อย่างไรก็ตาม เพื่อความสะดวก อาจสมมติว่าตำแหน่งที่เกิดอยู่ที่ระยะ $\frac{\pi}{4}$ จากปลายใดปลายหนึ่งของช่วงความยาว L' ทั้งนี้ความแตกต่างและความผิดพลาดที่เกิดขึ้นมีค่าน้อย



รูปที่ 4-7 โมเมนต์ดัดที่เกิดขึ้นกับคานโดยน้ำหนักบรรทุกสม่ำเสมอแบบต่างๆ

<u>ตัวอย่างที่ 4.5</u>

คานไม้ยาวอันหนึ่ง (E = 10 GPa) หน้าตัดคานเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ากว้าง 100 mm และหนา 200 mm วางอยู่บนพื้นดินที่มีค่า $k_0 = 0.040$ N/mm^3 บนคานมีน้ำหนักแบบแผ่กระจาย w เท่ากับ 35.0 N/mm กระทำตลอดช่วงความยาว $L' = 3.6$ m ดังแสดงในรูป จงคำนวณหาค่าสูงสุดของการโก่งตัว การดัด และความดันระหว่างคานกับฐานราก กำหนดให้จุดกำเนิดอยู่ที่กึ่งกลางความยาว L'



รูปตัวอย่างที่ 4.5

$$\because \qquad k = bk_0 = 100\times 0.040 = 4.00\ \text{N/mm}^2$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{100\times 200^3}{12} = 66.67\times 10^6\,\text{mm}^4$$

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI_x}} = \sqrt[4]{\frac{4.0}{4\times 10\times 10^3\times 66.67\times 10^6}}$$

$$= 1.107\times 10^3\ \text{mm}^{-1}$$

ระยะ $\qquad \beta L' = 4.0\ \text{m} = 1.107\times 10^{-3}\times 3.61\times 10^3 = 4.0\ \text{m}$

$\therefore \qquad \pi < \beta L' < \alpha$ หรือ $\beta b = 4 - \beta a$

ระยะ a และ b ใด เมื่ออยู่ในช่วง L' อาจเขียนกราฟแสดงค่า y, θ, M_x และ V_y ได้โดยการใช้สมการที่ 4-20 ถึงสมการที่ 4-27 และข้อมูลจากตารางสำหรับค่าต่างของ $A_{\beta z}$, $B_{\beta z}$, $C_{\beta z}$ และ $D_{\beta z}$ ค่าที่ได้นี้แสดงให้เห็นในรูป (b), (c), (d) และ (e) ตามลำดับ ส่วนค่าของ θ_H และ V_H ที่อยู่นอกช่วงระยะ L' หาได้โดยแทนค่า

$$\beta b \quad = \quad \beta(a+L')$$

ลงในสมการที่ 4-25 และสมการที่ 4-27 ส่วนระยะ a เป็นระยะจากจุด H ถึงปลายที่ใกล้ที่สุดของแรงกระจาย ส่วนค่าของ y_H และ M_H นอกช่วงความยาว L' หาได้จากสมการต่อไปนี้

$$y_H \quad = \quad \frac{w}{2k}(D_{\beta a}-D_{\beta b}) \qquad (1)$$

$$M_H = \quad -\frac{w}{4\beta^2}(B_{\beta a}-B_{\beta b}) \qquad (2)$$

$$\therefore \qquad \beta a \quad = \quad \beta b \quad = \quad 2$$

จากตารางที่ 4.1 พบว่า $D_{\beta a} \;=\; -0.0563$ และจากสมการที่ 4-24 ได้ว่า

$$y_{max} \quad = \quad \frac{w}{k}(1-D_{\beta a}) \;=\; \frac{35}{4}(1+0.0563) \quad = \quad 9.243\ \text{mm}$$

ความดันสูงสุดระหว่างคานกับฐานรากเกิดที่เดียวกับจุด y_{max}

$$\therefore \qquad q_{max} \quad = \quad y_{max}k_0 \quad = \quad 9.243\times 0.040 \quad = \quad 0.370\ \text{MPa}$$

โมเมนต์ดัดสูงสุดที่เกิดขึ้นที่ตรงตำแหน่ง $V_H = 0$ หรือจากสมการที่ 4-27

$$V_H \quad = \quad 0 \;=\; \frac{w}{4\beta}(C_{\beta a}-C_{\beta b}) \Rightarrow \; C_{\beta a} \;=\; C_{\beta b}$$

จากตารางที่ 4.1 พบว่า ที่ $C_{\beta a}$ เท่ากับ $C_{\beta b}$ มีอยู่ 4 ตำแหน่ง คือ

$\beta a \;=\; 0.858$ กับ $\beta b \;=\; 3.142$ อยู่ในช่วง L'

$\beta a \;=\; 0.777$ กับ $\beta b \;=\; 4.777$ อยู่นอกช่วง L'

แต่ปัญหานี้ ค่าโมเมนต์ดัดสูงสุดเกิดอยู่นอกช่วง L' ดังนั้นจึงใช้ค่า $\beta a = 0.777$ ไปหาค่า $B_{\beta a}$ และ $B_{\beta b}$ แล้วจึงแทนลงในสมการที่ (2)

$$\therefore \quad M_{max} = \left| -\frac{w}{4\beta^2}(B_{\beta a} - B_{\beta b}) \right|$$

$$= \frac{35}{4(1.107\times10^{-3})^2}\left[0.3223-(-0.0086)\right]$$

$$= 2.363 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

แต่ถ้าใช้ค่า $\beta a = 0.858$ และ $\beta b = 3.142$ แล้วหาค่าของ $B_{\beta a}$ และ $B_{\beta b}$ จึงแทนค่าลงในสมการที่ 4-26 พบว่า M_{max} ที่ได้มากกว่าประมาณร้อยละ 3 ซึ่งถือว่าใช้ได้

$$\therefore \quad \sigma_{max} = \frac{M_{max}C}{I_x} = \frac{2.363\times10^6\times100}{66.67\times10^6} = 3.544\,\text{MPa}$$

โดยการประมาณอาจสมมติว่าตำแหน่งที่เกิด M_{max} อยู่ที่ระยะ $\frac{\pi}{4\beta}$ จากปลายปลายหนึ่งของ L'

$$\therefore \ \beta a = \frac{\pi}{4} \quad \text{และ} \quad \beta b = 4-\frac{\pi}{4} \quad \text{จากตารางได้ } B_{\beta a} = 0.322\,, B_{\beta b} = -0.0029$$

$$\therefore \ M_H = \frac{w}{4\beta^2}(B_{\beta a} + B_{\beta b}) = \frac{35}{4\times(1.107\times10^{-3})^2}\left[0.3224+(-0.0029)\right]$$

$$= 2.362 \ \text{kN}\cdot\text{m}$$

ค่าแตกต่างไปเพียงร้อยละ 3.5 $\therefore$ ในทางปฏิบัติ การใช้ $\beta a = \frac{\pi}{4}$ และ $\beta b = \beta L' - \frac{\pi}{4}$ ให้ค่า ประมาณที่ดีของ M_{max}

หมายเหตุ สูตรการอินทิเกรตหา y_H, θ, M_H, และ V_H

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} \qquad (1)$$

$$\int e^{bx}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\cos bx - b\sin bx)}{a^2+b^2} \qquad (2)$$

$$\therefore \quad \int_o^a e^{-\beta z}\sin\beta z dz = e^{-\beta z}\frac{(-\beta\sin\beta z - \beta\cos\beta z)}{2\beta^2}\Bigg|_0^a$$

$$= \frac{1}{2\beta}(-e^{-\beta a}\sin\beta a - e^{-\beta a}\cos\beta a + 1) \qquad (3)$$

และ

$$\int_o^a e^{-\beta z}\sin\beta z dz = e^{-\beta z}\frac{(-\beta\cos\beta z - \beta\sin\beta z)}{2\beta^2}\Bigg|_0^a$$

$$= \frac{1}{2\beta}(-e^{-\beta a}\cos\beta a + e^{-\beta a}\sin\beta a + 1) \qquad (4)$$

(3) + (4) ;

$$\int_0^a C^{-\beta z}(\cos\beta z + \sin\beta z)dz = \frac{1}{2\beta}(2 - 2e^{-\beta a}\cos\beta a) = \frac{1}{\beta}(1 - e^{-\beta a}\cos\beta a)$$

เช่นกัน

$$\int_0^b C^{-\beta z}(\cos\beta z + \sin\beta z)dz = \frac{1}{\beta}(1 - e^{-\beta b}\cos\beta b) \qquad (5)$$

$$\therefore \quad y_H = \frac{w\beta}{2k}\left[\int_o^a e^{-\beta z}(\cos\beta z + \sin\beta z)\,dz + \int_0^b e^{-\beta z}(\cos\beta z + \sin\beta z)\right]dz$$

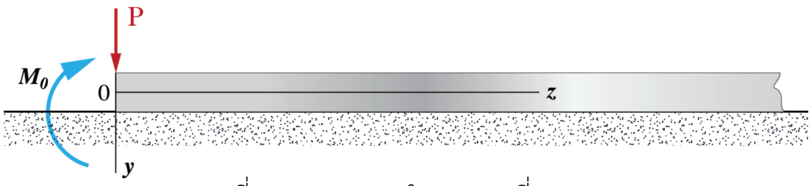
$$= \frac{w\beta}{2k}\left[\frac{1}{\beta}(1 - e^{-\beta a}\cos\beta a) + \frac{1}{\beta}(1 - e^{-\beta b}\cos\beta b)\right]$$

$$y_H = \frac{w\beta}{2k}\left[\int_o^a 2 - e^{-\beta z}\cos\beta a - e^{-\beta b}\cos\beta b\right]$$

$$= \frac{w\beta}{2k}(2 - D_{\beta a} - D_{\beta b})$$

4.5 คานยาวกึ่งอนันต์มีน้ำหนักบรรทุกแบบจุดที่ปลาย

คานอันหนึ่งที่มีความยาวมากๆ โดยมีจุดเริ่มต้นที่จุดศูนย์และยาวไปทางด้าน +z ซึ่งพิจารณาเป็นความยาวกึ่งอนันต์มีน้ำหนักบรรทุกแบบจุดที่ปลาย (semi-infinite beam subjected to loads at its end) อยู่บนที่รองรับยืดหยุ่น ที่ปลายข้างหนึ่งมีแรง P และโมเมนต์ดัด M_0 กระทำ ดังแสดงในรูปที่ 4-8



รูปที่ 4-8 แรงกระทำแบบจุดที่ปลาย

เงื่อนไขขอบเขตสำหรับคานประเภทนี้ เป็นดังนี้

$$\left.\begin{aligned} EI_x \frac{d^2y}{dz^2}\bigg|_{z=0} &= -M_0 \\ EI_x \frac{d^3y}{dz^3}\bigg|_{z=0} &= -V_y = P \end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}28)$$

โดยการแทนสมการที่ 4-27 $(y = e^{-\beta z}(C_3 \sin\beta z + C_4 \cos\beta z))$ ลงในสมการที่ 4-28 ทำให้หาค่า C_3 และ C_4 ได้เป็น

$$\left.\begin{aligned} C_3 &= \frac{2\beta^2 M_0}{k} \\ C_4 &= \frac{2\beta P}{k} - C_3 \end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}29)$$

แทนค่า C_3 และ C_4 กลับลงในสมการที่ 4-17 จะได้

$$y = \frac{2\beta e^{-\beta z}}{k}\left[P\cos\beta z - \beta M_0(\cos\beta z - \sin\beta z)\right] \quad (4\text{-}30)$$

โดยแทนค่า y จากสมการที่ 4-30 ลงในสมการที่ 4-1a ถึงสมการที่ 4-1c ก็จะได้ θ, M_x และ V_y และโดยการใช้สมการที่ 4-17 ทำให้จัดรูปแบบของ y, θ, M_x และ V_y ได้ดังนี้

$$y = \frac{2P\beta}{k} D_{\beta z} - \frac{2\beta^2 M_0}{k} C_{\beta z} \quad (4\text{-}31)$$

$$\theta = -\frac{2P\beta^2}{k} A_{\beta z} + \frac{4\beta^3 M_0}{k} D_{\beta z} \quad (4\text{-}32)$$

$$M_x = -\frac{P}{\beta} B_{\beta z} + M_0 A_{\beta z} \quad (4\text{-}33)$$

$$V_y = -PC_{\beta z} - 2M_0\beta B_{\beta z} \quad (4\text{-}34)$$

สมการที่ 4-31 ใช้ได้เสมอเมื่อแรง P และ M_0 กระทำพร้อมกัน และค่า $z \ge 0$

ตัวอย่างที่ 4.6

คานเหล็กรูปตัว I มีค่า E = 200 GPa กว้าง 68 mm หนา 102 mm $I_x = 253 \times 10^6$ mm^4 คานนี้ยาว 4 m และวางอยู่บนฐานรากที่มีค่า k_0 = 0.350 N/mm^3 แรง P = 30 kN กระทำที่ปลายข้างหนึ่งของคาน จงคำนวณหา y_{max} และ σ_{max} และตำแหน่งที่เกิดขึ้นของแต่ละค่า

วิธีทำ

$$k = bk_0 = 0.350\times 68 = 23.8\,\text{N/mm}^2$$

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI_x}} = \sqrt[4]{\frac{23.8}{4\times 200\times 10^3\times 2.53\times 10^6}}$$

$$= 1.852\times 10^{-3}\ \text{mm}^{-1}$$

ตรวจสอบความยาวคานที่กำหนดให้กับความยาว $3\pi/2\beta$

$$\frac{3\pi}{2\beta} = \frac{3\pi}{2\times 1.852\times 10^{-3}} = 2540 < 4000 \quad \text{OK}$$

$\therefore$ การหาคำตอบโดยใช้สมการของคานบนฐานรากยืดหยุ่น จึงใช้ได้ในกรณีไม่มีโมเมนต์ดัดที่ปลายคาน $M_0 = 0$ จากสมการที่ 4-31 และ 4-33 ได้

$$y = \frac{2P\beta}{k}D_{\beta z} \qquad (1)$$

$$M_x = -\frac{P}{\beta}B_{\beta z} \qquad (2)$$

จากสมการที่ (1) y_{max} เกิดขึ้นเมื่อ $D_{\beta z} = 1$ หรือที่ $\beta z = 0$ ใต้จุดที่แรง P กระทำ

$$\therefore \quad y_{max} = \frac{2\times 30\times 10^3\times 1.852\times 10^{-3}}{23.8} = 4.67\ \text{mm}$$

จากสมการที่ (2) M_{max} เกิดขึ้นเมื่อ $B_{\beta z}$ มีค่ามากที่สุด ซึ่งจากตารางพบว่าค่าสูงสุดของ $B_{\beta z} = 0.3224$ และอยู่ตำแหน่งที่ $\beta z = \frac{\pi}{4}$

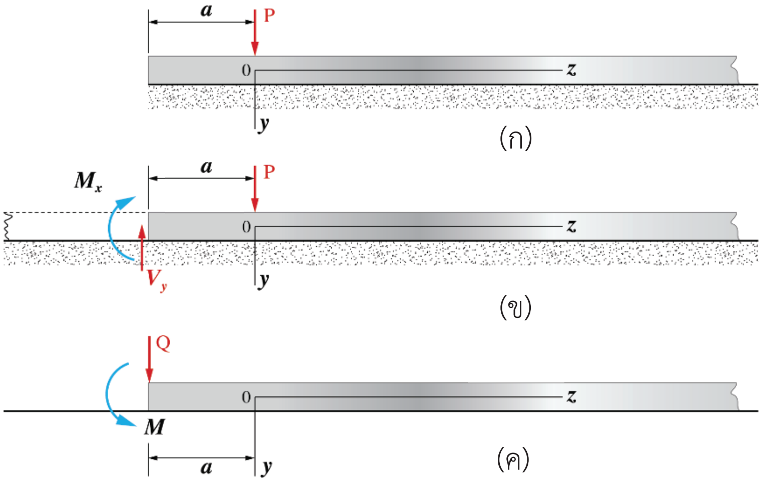
$$\therefore \quad M_{max} = -\frac{30\times 10^3\times 0.3224}{1.852\times 10^{-3}} = -5.22\ \text{kN.m}$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}C}{I_x} = \frac{5.22\times 10^6\times 51}{2.53\times 10^{-3}} = 105.3\ \text{MPa}$$

ตำแหน่งที่เกิด σ_{max} อยู่ที่ระยะ $z = \frac{\pi}{4\beta} = \frac{\pi}{4\times 1.852\times 10^{-3}} = 424\ \text{mm}$

4.6 คานยาวกึ่งอนันต์มีน้ำหนักบรรทุกแบบจุดกระทำใกล้ที่ปลายคาน

พิจารณาคานที่มีความยาวกึ่งอนันต์มีน้ำหนักบรรทุกแบบจุดที่กระทำใกล้ปลายคาน (semi-infinite beam with concentrated load near its end) ที่ระยะ a จากปลายข้างหนึ่งมีแรง P กระทำ ดังแสดงในรูป



รูปที่ 4-9 แรงกระทำใกล้ที่ปลายคาน

สมมติว่า คานในรูปที่ 4-9(ก) ถูกต่อให้ยาวออกไปมากๆ ด้วยเส้นประ ดังนั้นขนาดของ M_x และ V_y ที่ระยะ z = -a หาได้จากสมการที่ 4-15 และ สมการที่ 4-16

$$M_x\Big|_{z=-a} = \frac{PC_{\beta a}}{4\beta} \qquad (4\text{-}35)$$

และ

$$V_y\Big|_{z=-a} = \frac{PD_{\beta a}}{2} \qquad (4\text{-}36)$$

ต่อไปสมมติว่าคานนี้ถูกแรง Q และโมเมนต์ดัด M กระทำที่ระยะ z = -a ขนาดของ Q และ M เท่ากับ V_y และ M_x ในสมการที่ 4-35 และสมการที่ 4-36 ตามลำดับ และมีทิศทางตรงกันข้าม ดังในรูปที่ 4-9(ข) ดังนั้นขนาดของ Q และ M เท่ากับ

$$Q = \frac{PD_{\beta a}}{2} \qquad (4\text{-}37)$$

และ

$$M = -\frac{PC_{\beta a}}{4\beta} \qquad (4\text{-}38)$$

เนื่องจากจุดกำเนิดของแกนพิกัดอยู่ที่ระยะ a จากตำแหน่งของแรง Q และโมเมนต์ M ดังนั้น การโก่งตัวและโมเมนต์ดัด สำหรับแรงกระทำนี้หาได้จากสมการที่ 4-31 และ 4-33 ตามลำดับ โดยที่ระยะ z แทนด้วยระยะ a + z โดยการซ้อนกันของคานในรูปที่ 4-9(ข) และ 4-9(ค) เป็นการกำจัดโมเมนต์ดัดและแรงเฉือนที่ปลายข้างซ้าย ผลที่ได้คือคำตอบของคานที่ยาวกึ่งอนันต์มีแรง P กระทำที่ระยะ a จากปลายข้างซ้าย ให้ y_1 และ M_1 เป็นการโก่งตัว และโมเมนต์ดัดของคานรูปที่ 4-9(ข) ที่ระยะ z = -a;

$$y_1 = \frac{P\beta}{2}A_{\beta z} \tag{4-39}$$

$$M_1 = \frac{PC_{\beta z}}{4\beta} \tag{4-40}$$

ให้ y_2 และ M_2 เป็นการโก่งตัว และโมเมนต์ดัดของคานรูปที่ 4-9(ค)

$$\therefore \quad y_2 = 2\left(\frac{PD_{\beta a}}{2}\right)\frac{\beta D_{\beta(a+z)}}{k} - 2\beta^2\left(-\frac{PC_{\beta a}}{4\beta}\right)_k C_{\beta(z+a)}$$

$$= \frac{P_\beta D_{\beta a}}{k}D_{\beta(a+z)} + \frac{P_\beta C_{\beta a}}{2k}C_{\beta(a+z)} \tag{4-41}$$

$$\therefore \quad M_2 = -\left(\frac{PD_{\beta a}}{2}\right)\frac{\beta_{\beta(a+z)}}{k} + \left(-\frac{PC_{\beta a}}{4\beta}\right)A_{\beta(a+z)}$$

$$= -\frac{P}{2\beta}D_{\beta a}B_{\beta(a+z)} - \frac{P}{4\beta}C_\beta A_{\beta(a+z)} \tag{4-42}$$

โดยการซ้อนกันของคานรูปที่ 4-9(ข) และ 4-9(ค) ได้ค่าการโก่งตัว และโมเมนต์ดัดของคานที่มีแรง P กระทำใกล้ๆ กับปลาย

$$\therefore \quad y = y_1 + y_2$$

$$= \frac{P\beta}{2k}(A_{\beta z} + 2D_{\beta a}D_{\beta(a+z)} + C_{\beta a}C_{\beta(a+z)}) \tag{4-43}$$

$$M = M_1 + M_2$$

$$= \frac{P}{4\beta}(C_{\beta z} - 2D_{\beta a}B_{\beta(a+z)} - C_{\beta a}A_{\beta(a+z)}) \tag{4-44}$$

สมการทั้งสองนี้ ใช้ได้เมื่อ $z \geq -a$ เนื่องจากเทอม $A_{\beta z}$ และ $C_{\beta z}$ ในสมการทั้งสอง มีความสมมาตรในค่าของ z ดังนั้น ที่ค่าเป็นลบของ z(-z) หาได้จากค่าบวกของเทอมทั้งสอง หรือ

$$A_{\beta z}(-z) = A_{\beta z}(z)$$

และ

$$C_{\beta z}(-z) = C_{\beta z}(z)$$

ตัวอย่างที่ 4.7

คานเหล็กรูปตัว I มีค่า E = 200 GPa กว้าง 68 mm หนา 102 mm $I_x = 253 \times 10^6$ mm^4 คานนี้ยาว 4 m และวางอยู่บนฐานรากที่มีค่า k_0 = 0.350 N/mm^3 แรง P = 30 kN ห่างจากปลายคานเป็นระยะ 500 mm จากปลาย จงคำนวณหาค่าการโก่งตัวสูงสุด และความเค้นดัดสูงสุดในคานและตำแหน่งที่เกิด

วิธีทำ

จากตัวอย่างที่ 4.6 ที่แล้ว ได้ $k = 23.8\ \text{N/mm}^2,\ \beta = 0.001852\ \text{mm}^{-1}$

$$\because \qquad \beta a = 0.001852 \times 500 = 0.9260$$

จากตารางที่ 4.1 พบว่า $C_{\beta a} = -0.0782, D_{\beta a} = 0.2383$ แทนค่าเหล่านี้ลงในสมการที่ 4-43 และสมการที่ 4-44 ได้

$$y = \frac{P\beta}{2k}\left[A_{\beta z} + 2D_{\beta a}D_{\beta(a+z)} + C_{\beta a}C_{\beta(a+z)}\right]$$

$$= 1.1672\left[A_{\beta z} + 0.4766D_{\beta(a+z)} - 0.0782C_{\beta(a+z)}\right] \qquad (1)$$

$$M_x = \frac{P}{4\beta}\left[C_{\beta z} - 2D_{\beta a}B_{\beta(a+z)} - C_{\beta a}A_{\beta(a+z)}\right]$$

$$= 4,050,000\left[C_{\beta z} - 0.4766B_{\beta(a+z)} - C_{\beta a}A_{\beta(a+z)}\right] \qquad (2)$$

$\because$ จากการลองผิดลองถูก พบว่าตำแหน่งที่เกิดการโก่งตัวสูงสุดอยู่ที่ระยะ 424 mm จากปลายคาน หรือที่ระยะ $z = -76$ mm จากจุดกำเนิด

$$\therefore \qquad \beta z = 0.001852 \times (-76) = -0.1808$$

จากตารางที่ 4.1 ได้ $A_{\beta z}(z) = A_{\beta z}(-z) = 0.9816$

และ $\beta(a+z) = 0.001852 \times 424 = 0.7854$

จากตารางที่ 4.1 ได้ $D_{\beta(a+z)} = 0.3224$, = $C_{\beta(a+z)} = 0$

แทนค่า $A_{\beta z}, D_{\beta(a+z)}$ และ $C_{\beta(a+z)}$ ลงในสมการที่ (1) ได้

$$y_{max} = 1.1672\left[0.9816 + 0.4766(0.3224) - 0.0782(0)\right]$$

$$= 1.1672\left[0.9816 + 0.4766(0.3224) - 0.0782(0)\right]$$

$$= 1.3251\ \text{mm}$$

∴ จากการลองผิดลองถูก พบว่าตำแหน่งที่เกิดโมเมนต์ดัดสูงสุดอยู่ที่ระยะ 500 mm จากปลายคานหรือที่ระยะ z = 0

$$\beta z = 0 \quad \text{จากตารางได้} \quad C_{\beta z} = 1.00$$

และ $\beta(a+z) = 0.00185 \times 500 = 0.9260$ จากตารางได้ $A_{\beta(a+z)} = 0.5548$, $B_{\beta(a+z)} = 0.3165$
แทนค่า $C_{\beta z}$, $A_{\beta(a+z)}$ และ $B_{\beta(a+z)}$ ลงในสมการที่ (2) ได้

$$M_{max} = 4,050,000\left[1.00 - 0.4766(0.3165) + 0.0782(0.5548)\right]$$

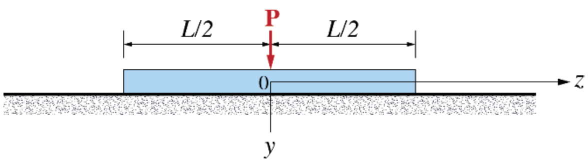
$$= 3,615,000 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$\therefore \qquad \sigma_{max} = \frac{M_{max}C}{I_x} = \frac{3,615,000 \times 51}{2,530,000} = 72.9 \text{ MPa}$$

4.7 คานสั้น

จากหัวข้อที่ผ่านมาทั้งหมดนั้น การวิเคราะห์หาคำตอบประมาณของปัญหาคานบนฐานรากยืดหยุ่น โดยทั่วไปถูกกำหนดได้ด้วยความยาวคานที่มากกว่า $\frac{3\pi}{2\beta}$ แต่อย่างไรก็ตามความยาวคานอาจน้อยกว่าค่านี้ได้ คานประเภทนี้เรียกว่า คานสั้น (short beams) (รูปที่ 4-10) คำตอบจึงนอกเหนือจากที่กล่าวมาข้างต้น

กรณีอย่างง่าย คือ คานสั้นอันหนึ่งมีแรง P กระทำที่กึ่งกลางความยาวของคาน ค่าสูงสุดการโก่งตัว y_{max} และค่าสูงสุดโมเมนต์ดัด M_{max} เกิดขึ้นที่ตำแหน่งใต้แรงกระทำ ซึ่งหาได้ดังนี้



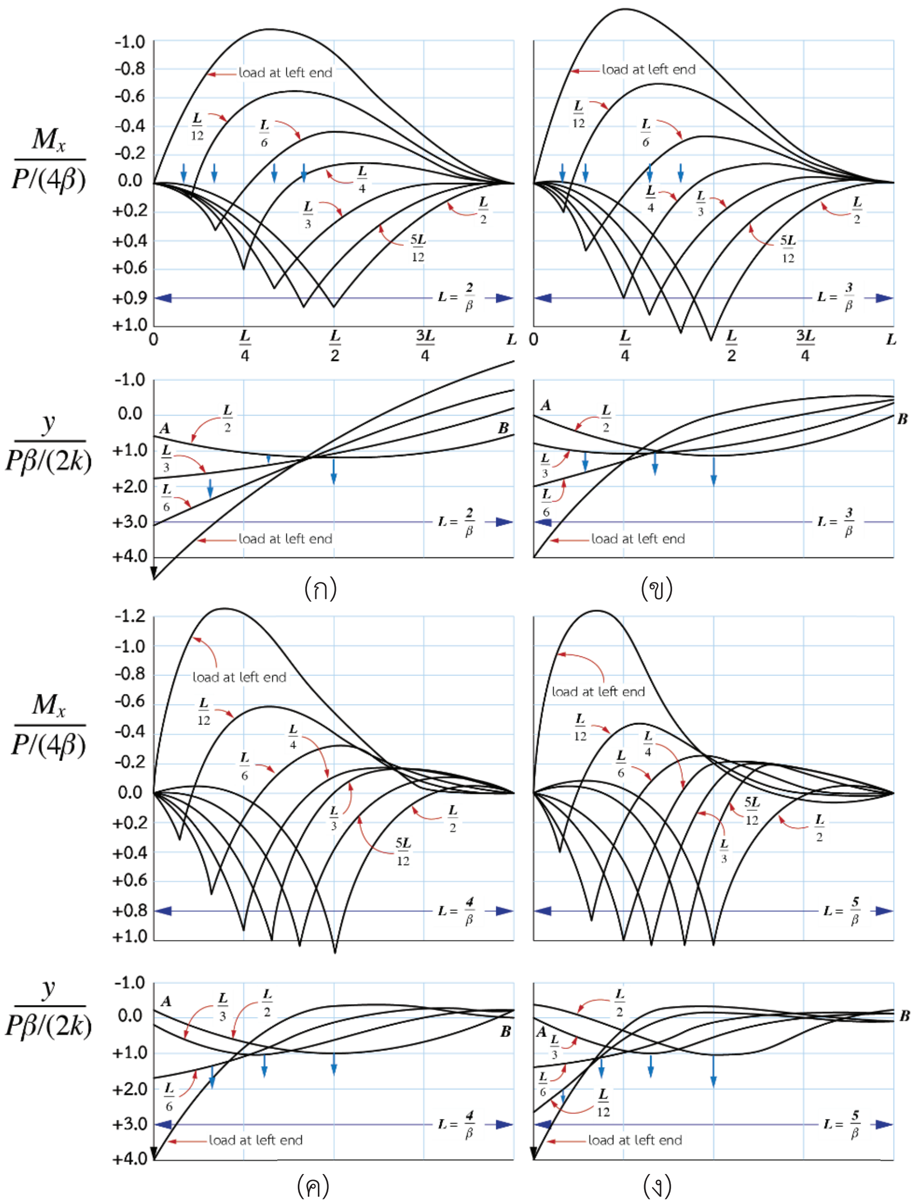
รูปที่ 4-10 แรงกระทำเป็นจุดบนคานสั้น

$$y_{max} = \frac{P\beta}{2k}\frac{\cosh\beta L + \cos\beta L + 2}{\sinh\beta L + \sin\beta L} \tag{4-45}$$

$$M_{max} = \frac{P}{4\beta}\frac{\cosh\beta L - \cos\beta L}{\sinh\beta L + \sin\beta L} \tag{4-46}$$

โดยที่ L เป็นความยาวของคาน

ค่าแสดงโมเมนต์ดัด M_x และการโก่งตัว y ของคานที่มีความยาวต่างๆ กัน ตั้งแต่ $\frac{2}{\beta}, \frac{3}{\beta}, \frac{4}{\beta}$ และ $\frac{5}{\beta}$ พร้อมทั้งตำแหน่งของแรง P ที่ตำแหน่งต่างๆ คือที่ปลาย $\frac{L}{12}, \frac{L}{6}, \frac{L}{4}, \frac{L}{3}, \frac{5}{12}$ และ $\frac{L}{2}$ ค่าเหล่านี้แสดงไว้ในรูปที่ 4-11



รูปที่ 4-11 กราฟการโก่งตัวและโมเมนต์ดัดของคานสั้นความยาวต่างๆ

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 4

1) รางรถไฟทำด้วยเหล็กกล้า มี E = 200 GPa หนา 184 mm ระยะจากด้านบนของรางถึงจุดศูนย์ถ่วงของหน้าตัด 90.1 mm มีค่า $I = 36.9 \times 10^6$ mm^4 รางรถไฟวางอยู่บนฐานรากยืดหยุ่นที่มีค่าคงที่ของสปริง k = 7 N/mm^2 จงคำนวณหาการโก่งตัวสูงสุดและโมเมนต์ดัดสูงสุด เมื่อล้อรถไฟเดียวหนัก 170 kN วางอยู่บนคาน

2) คานอลูมิเนียมมีค่า E = 72 GPa กว้าง 76 mm หนา 127 mm $I = 5.12 \times 10^6$ mm^4 ยาว 4 m คานนี้วางอยู่บนฐานรากทำด้วยยางที่มีค่าคงที่ของสปริง k_0 = 7 N/mm^3 บนคานมีแรง P = 60 kN กระทำที่กึ่งกลางความยาว จงคำนวณหาค่าการโก่งตัวสูงสุดและความเค้นดัดสูงสุดที่เกิดขึ้นในคาน

3) รอกขนาด 60 kN สามารถเคลื่อนที่ตลอดแนวของคานรูปตัว I มี E = 200 GPa หนา 152 mm และ $I = 11.0 \times 10^6$ mm^4 โดยคานถูกแขวนไว้กับเหล็กกลม E = 200 GPa ยาว 2.50 m มีเส้นผ่านศูนย์กลาง 18 mm และมีช่วงห่างกันในระยะ 500 mm โดยที่จุดกึ่งกลางของคานเป็นจุดยึดกับเหล็กกลมพอดี จงหาความเค้นดัดสูงสุดในคานและเหล็กกลม

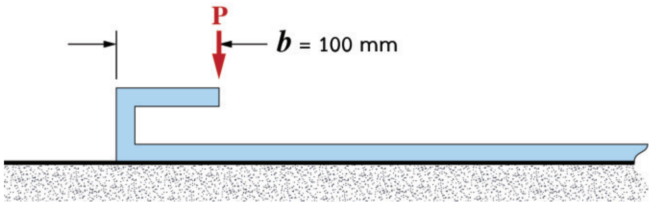
4) คานไม้ยาวอันหนึ่ง E = 12.4 GPa หนา 200 mm กว้าง 60 mm วางบนแผ่นยางลูกบาศก์ขนาด 100 mm ตลอดความยาวคานที่ระยะห่าง l = 600 mm มีค่าคงที่ของสปริง k_0 = 7 N/mm^3 มีแรง P กระทำที่กึ่งกลาของคานตรงจุดรองรับของแผ่นยางพอดี ถ้าคานมีค่า Fy = 40 MPa จงหา P สูงสุดเมื่อ F.S. = 2.50

5) คานเหล็กมีค่า E = 200 GPa กว้าง 76 mm หนา 127 mm $I = 5.12 \times 10^6$ mm^4 ยาว 4 m คานนี้วางอยู่บนฐานรากทำด้วยยางที่มีค่าคงที่ของสปริง k_0 = 0.270 N/mm^3 บนคานมีแรง w = 20 kN/m กระจายสม่ำเสมอในช่วง L’ = 1.0 m จงคำนวณหาค่าการโก่งตัวสูงสุด และความเค้นดัดสูงสุดที่เกิดขึ้นในคาน

6) คานไม้ยาวอันหนึ่ง E = 12.4 GPa หนา 200 mm กว้าง 60 mm วางบนฐานรากยืดหยุ่นมีค่าคงที่ของสปริง k_0 = 0.330 N/mm^3 ถูกกระทำด้วยน้ำหนักแบบแผ่กระจาย w กระทำตลอดช่วงความยาว L’ = 3.61 m จงคำนวณหาค่า w เมื่อกำหนดให้ F.S. = 2.0

7) คานเหล็กรูปตัวไอ มีค่า E = 210 GPa กว้าง 70 mm หนา 120 mm มีค่า $I = 323 \times 10^6$ mm^4 คานนี้ยาว 4.5m วางอยู่บนฐานรากที่มีค่าคงที่ของสปริง k_0 = 0.350 N/mm^3 มีแรง P = 30 kN และ M_o = 5 kN.m กระทำที่ปลายข้างหนึ่งของคาน จงคำนวณหาการโก่งตัวสูงสุด ความเค้นดัดสูงสุดและตำแหน่งที่เกิดขึ้นของแต่ค่า

8) คานยาวทำด้วยทองเหลือง มีค่า $E = 82.7$ GPa กว้าง 15 mm หนา 20 mm วางอยู่บนฐานรากที่มีค่าคงที่ของสปริง $k_0 = 0.200$ N/mm^3 มีแรง $P = 700$ N ดังรูป จงคำนวณหาการโก่งตัวสูงสุด ความเค้นดัดสูงสุด



รูปแบบฝึกหัดข้อ 8)

9) คานเหล็กรูปตัวไอ มีค่า $E = 200$ GPa กว้าง 76 mm หนา 127 mm $I = 5.12 \times 10^6$ mm^4 ยาว 4 m คานนี้วางอยู่บนฐานรากทำด้วยยางที่มีค่าคงที่ของสปริง $k_0 = 0.270$ N/mm^3 บนคานมีแรง $P = 10$ kN จงคำนวณหาค่าการโก่งตัวสูงสุดและความเค้นดัดสูงสุดที่เกิดขึ้นในคาน เมื่อกำหนดให้ตำแหน่งของแรง P กระทำห่างจากจุดปลายคาน (ก) ระยะ 1.00 m และ (ข) ระยะ 500 mm

บทที่ 5
แรงบิด

5.1 บทนำ

แรงบิด เป็นโมเมนต์ที่กระทำให้ลักษณะบิดเกลียวต่อชิ้นส่วนในแนวแกนตามยาวทำให้เกิดการเสียรูปเป็นเกลียวตามยาวก่อนที่จะขาดออกจากกัน โดยแรงบิดนี้ถ้ากระทำกับชิ้นส่วนหน้าตัดวงกลม หน้าตัดวงกลมจะไม่เกิดการเสียรูปหรือบิดเบี้ยวแต่อย่างไร หน้าตัดยังคงสภาพเป็นรูปวงกลมดังเดิม อย่างไรก็ตาม แรงบิดที่กระทำกับหน้าตัดรูปทรงเรขาคณิตอื่นทำให้เกิดแรงภายในที่มีความซับซ้อน แตกต่างกันไปขึ้นอยู่กับลักษณะหน้าตัด การใช้คณิตศาสตร์ประยุกต์กับทฤษฎีทางวิศวกรรม จึงจำเป็นต่อการวิเคราะห์แรงภายในกับหน้าตัดเหล่านี้ เพื่อใช้กับชิ้นส่วนโครงสร้างที่มีหลากหลายในงานวิศวกรรม

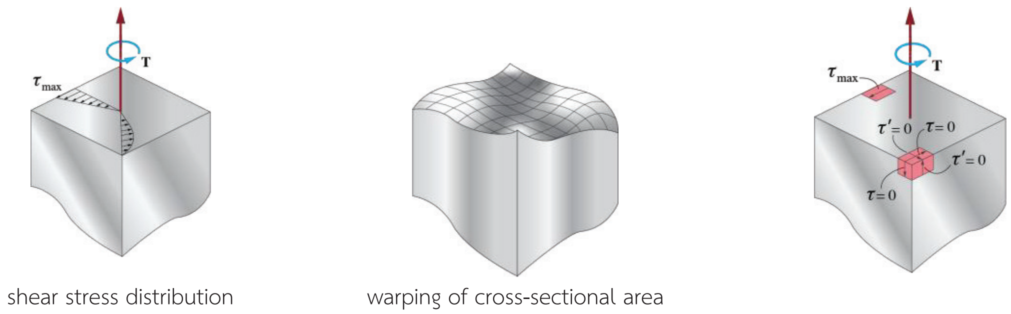
5.2 เพลาหน้าตัดที่ไม่ใช่วงกลมตัน

พฤติกรรมโมเมนต์บิดกระทำต่อเพลาหน้าตัดรูปวงกลม จากคุณสมบัติการสมมาตรตามแนวแกน ความเครียดเฉือนจะแปรค่าจากศูนย์ที่ศูนย์กลางเพลาไปยังค่าที่มากที่สุดที่พื้นที่ผิวภายนอกของเพลา นอกจากนั้นความสม่ำเสมอของความเครียดเฉือนที่จุดทั้งหมดบนรัศมีเดียวกัน หน้าตัดจะไม่มีการเปลี่ยนรูปร่าง แต่จะยังคงอยู่ในระนาบภายหลังเพลามีมุมการบิด สำหรับเพลาจะมีหน้าตัดไม่เป็นรูปวงกลม จะไม่มีการสมมาตรตามแนวแกน เนื่องจากหน่วยแรงเฉือนบนหน้าตัดดังกล่าวนี้จะกระจายในลักษณะที่มีความซับซ้อนมาก หน้าตัดนี้จะเกิดการบิดเบี้ยวหรือโก่งตัวเมื่อเพลาถูกบิด จะเห็นได้ชัดจากวิธีการที่แนวเส้นตัดกันแสดงการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของเพลาที่มีหน้าตัดสี่เหลี่ยมจัตุรัส เมื่อเพลาโมเมนต์บิดกระทำดังแสดง ในรูปที่ 5-1 การเปลี่ยนแปลงรูปร่างนี้ การวิเคราะห์การบิดของเพลาที่ไม่ใช่รูปวงกลม (solid noncircular shafts) จะถูกพิจารณาโดยวิธีการที่ซับซ้อน

การใช้การวิเคราะห์ทางคณิตศาสตร์บนพื้นฐานทฤษฎีของความยืดหยุ่น จำเป็นต้องหาการกระจายหน่วยแรงเฉือนภายในของเพลาที่มีหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ยกตัวอย่างเช่น หน่วยแรงเฉือนนี้แปรค่าตามแนวเส้นรัศมีของเพลาดังแสดงในรูปที่ 5-2(ก) ดังที่กล่าวแล้วข้างต้น เนื่องจากการกระจายหน่วยแรงเฉือนจะแปรค่าในลักษณะที่ซับซ้อน ความเครียดเฉือนทำให้เกิดการยกตัวและยุบตัวเป็นลักษณะเคลื่อนของหน้าตัดดังแสดงในรูปที่ 5-2(ข) โดยเฉพาะอย่างยิ่ง พบว่าจุดมุมของเพลาจะถูกกระทำด้วยหน่วยแรงเฉือนที่มีค่าเป็นศูนย์เหตุผลนี้แสดงโดยพิจารณาชิ้นส่วนของวัสดุที่อยู่จุดใดจุดหนึ่งของจุดดังกล่าวนี้ดังแสดงในรูปที่ 5-2(ค) ผิวหน้าที่แรเงาของชิ้นส่วนนี้ถูกกระทำด้วยแรงเฉือน เพื่อช่วยต้านทานการบิดกระทำ T อย่างไรก็ตาม เนื่องจากหน่วยแรงเฉือน τ และ τ' กระทำบนพื้นที่ผิวภายนอกของเพลามีค่าเป็นศูนย์ซึ่งเป็นนัยว่าแรงย่อยหน่วยแรงเฉือนสอดคล้อง τ และ τ' บนผิวหน้าที่แรเงามีค่าเท่ากับศูนย์

ผลการวิเคราะห์ข้างต้น ตามด้วยผลอื่นๆ จากทฤษฎีของความยืดหยุ่น สำหรับเพลาที่มีหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยม สามเหลี่ยม และวงรีที่ได้กล่าวไว้ในตารางที่ 5-1 ในทุกกรณีหน่วยแรงเฉือนที่มากที่สุดที่เกิดขึ้นที่จุดบนขอบของหน้าตัด ซึ่งใกล้กับแกนศูนย์กลางของเพลา ในตารางที่ 5-1 จุดดังกล่าวนี้จะบ่งบอกเป็นจุดบนหน้าตัด นอกจากนั้นยังให้สมการสำหรับมุมของการบิดของแต่ละเพลา เพลาที่มีหน้าตัดใดๆ ได้แสดงเพลาที่มีหน้าตัดรูปวงกลมมีประสิทธิภาพ เนื่องจากเพลาถูกกระทำด้วยแรงเฉือนที่มากที่สุด และมุมของการบิดน้อยกว่าที่เพลาสอดคล้องกันที่มีหน้าตัดไม่ใช่รูปวงกลมและถูกกระทำด้วยโมเมนต์บิดเท่ากัน

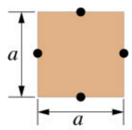
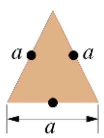
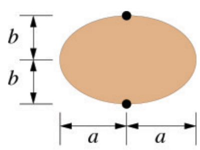
รูปที่ 5-1 การเปลี่ยนรูปร่างของเพลาที่มีหน้าตัดสี่เหลี่ยมจัตุรัสเมื่อมีโมเมนต์บิดกระทำ



(ก) (ข) (ค)

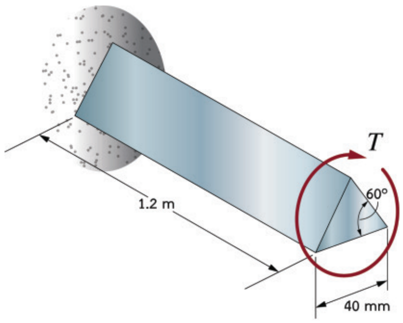
รูปที่ 5-2 การกระจายหน่วยแรงเฉือนภายใน ของเพลาที่มีหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

ตารางที่ 5.1 ตัวอย่างหน่วยแรงเฉือนบิดมากที่สุด (τ_{max}) และมุมของการบิด (ϕ) ของหน้าตัดต่างๆ

รูปทรงของหน้าตัด		τ_{max}	ϕ
สี่เหลี่ยมจัตุรัส		$\frac{4.18T}{a^3}$	$\frac{7.10TL}{a^4G}$
สามเหลี่ยมด้านเท่า		$\frac{20T}{a^3}$	$\frac{46TL}{a^4G}$
วงรี		$\frac{2T}{\pi ab^2}$	$\frac{(a^2+b^2)TL}{\pi a^3b^3G}$

ตัวอย่างที่ 5.1

เพลาอลูมิเนียม 6061-T6 ดังแสดงในรูป มีพื้นที่หน้าตัดในรูปทรงสามเหลี่ยมด้านเท่า จงคำนวณหาโมเมนต์บิดที่มีค่ามากที่สุด T ที่สามารถกระทำที่ปลายของเพลา ถ้าหน่วยแรงเฉือนที่ยอมรับได้ τ_{allow} = 56 MPa และมุมของการบิดที่ปลายของเพลาถูกจำกัดเป็น ϕ_{allow} = 0.02 rad จงคำนวณหาโมเมนต์บิดที่กระทำต่อเพลาที่มีภาคตัดรูปวงกลมที่ทำจากอลูมิเนียมที่มีพื้นที่หน้าตัดเท่ากัน (G_{al} = 26 GPa)



รูปตัวอย่างที่ 5.1

วิธีทำ

โดยการตรวจสอบ การบิดภายในลัพธ์ที่ภาคตัดใดๆ ตามแนวแกนของเพลาคือ T ใช้สมการสำหรับหา τ_{max} และ ϕ ในตารางที่ 5.1 จะได้ว่า

$$\tau_{allow} = \frac{20T}{a^3}; \qquad 56\,N/mm^2 = \frac{20T}{(40\,mm)^3}$$

$$T = 179.2\times10^3\ N.mm = 179.2\ N.m$$

นอกจากนั้น

$$\phi_{allow} = \frac{46TL}{a^4 G_{al}}; \qquad 0.02\,rad = \frac{46T\,(1.2\,m)(10^3\,mm/m)}{(40\,mm)^4\,[26\,(10^3)\,N/mm^2]}$$

$$T = 24.12\,(10^3)\,N.mm = 24.12\ N.m$$

ทำการเปรียบเทียบค่าของโมเมนต์บิดถูกจำกัดจากมุมของการบิด

คำนวณโมเมนต์บิดสูงสุดถ้าคานมีภาคตัดรูปวงกลม (circular cross section) เมื่อคิดว่าปริมาณของอลูมิเนียมเท่ากันถูกใช้ทำเพลาที่มีความยาวเท่ากันที่มีหน้าตัดรุปวงกลม แล้วรัศมีของหน้าตัดจะคำนวณได้จาก

$$A_{circle} = A_{triangle}\,; \qquad \pi c^2 = \frac{1}{2}(40\text{mm})\left(40\sin 60^\circ\right)$$

$$c = 14.850 \text{ mm}$$

ใช้ขีดจำกัดของหน่วยแรงและมุมของการบิดจะได้

$$T_{allow} = \frac{Tc}{J}; \qquad 56\text{N/mm}^2 = \frac{T(14.850\text{ mm})}{(\pi/2)(14.850\text{ mm})^4}$$

$$T = 288.06(10^3)\,\text{N.mm} = 288.06\text{ N.m}$$

$$\phi_{allow} = \frac{TL}{JG_{al}}; \qquad 0.02\text{rad} = \frac{T(1.2\,\text{m})(10^3\text{ mm/m})}{(\pi/2)(14.850\,\text{mm})^4\,[26(10^3)\,\text{N/mm}^2]}$$

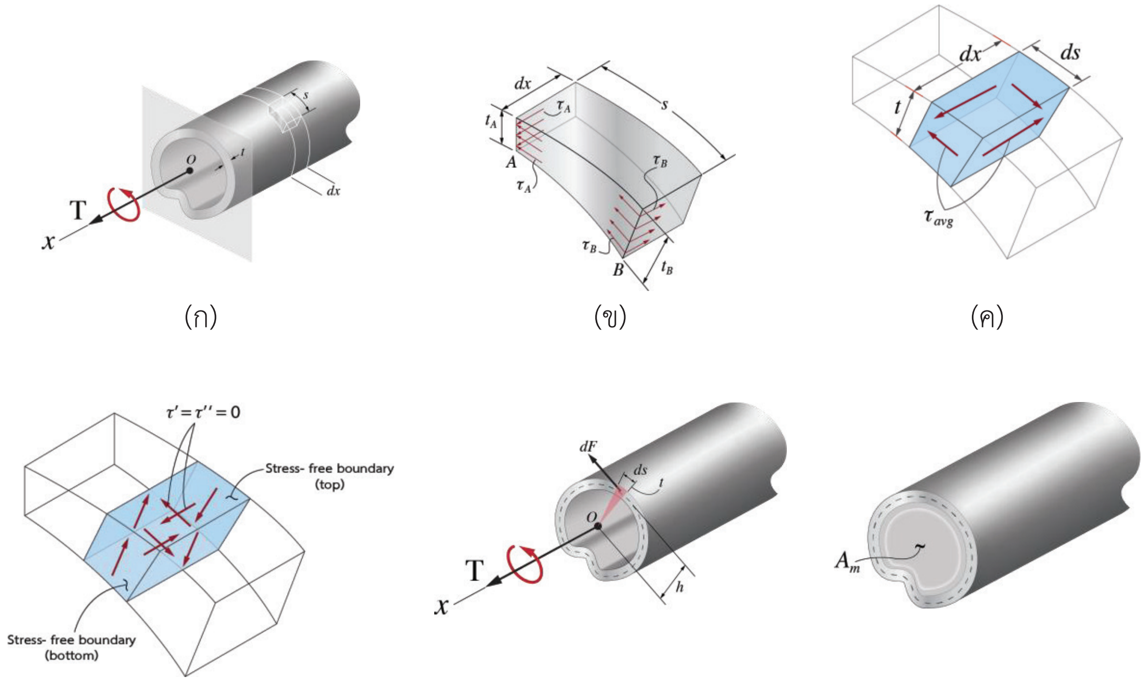
$$T = 33.10(10^3)\,\text{N.mm} = 33.10\text{ N.m}$$

อีกครั้งที่มุมของการบิดจำกัดโดยโมเมนต์บิดที่กระทำ

เปรียบเทียบผลนี้ (33.10 N.m) กับผลที่ได้ข้างต้น (24.12 N.m) พบว่า เพลาที่หน้าตัดรูปวงกลมสามารถรองรับโมเมนต์บิดมากกว่าเพลาที่มีหน้าตัดเป็นรูปสามเหลี่ยมถึงร้อยละ 37

5.3 ท่อผนังบางที่มีหน้าตัดปิด

ในกรณีท่อผนังบางของรูปทรงที่ไม่ใช่วงกลม มักจะใช้ในการสร้างโครงสร้างข้อแข็งที่ต้องการน้ำหนักเบาอย่างเช่นใช้ในปีกเครื่องบิน ในการประยุกต์บางอย่าง ท่อจะถูกกระทำด้วยโมเมนต์บิด ในส่วนนี้จะวิเคราะห์ผลของการประยุกต์บิดกระทำต่อผนังบางที่มีหน้าตัดบิด (thin-walled tubes having closed cross sections) นั่นคือ ท่อจะไม่มีการแตกหรือมีร่องเปิดเล็กๆ ตามความยาวของท่อ ท่อที่มีรูปทรงหน้าตัดใดๆ ที่คงที่ ดังแสดงในรูปที่ 5-3(ก) สำหรับการวิเคราะห์จะสมมุติว่าผนังมีความหนา t เนื่องจากผนังบาง สามารถได้คำตอบค่าประมาณสำหรับหน่วยแรงเฉือน โดยสมมุติว่าหน่วยแรงนี้มีการกระจายอย่างสม่ำเสมอตามความหนาของท่อ หรืออีกนัยหนึ่งว่าสามารถหาหน่วยแรงเฉือนเฉลี่ยในท่อที่จุดใดๆ โดยหลักการเบื้องต้นของการกระทำของหน่วยแรงเฉือนบนหน้าตัดมีดังต่อไปนี้



รูปที่ 5-3 การวิเคราะห์ท่อผนังบางที่มีหน้าตัดปิด

5.3.1 การไหลของหน่วยแรงเฉือน

การไหลของหน่วยแรงเฉือน (shears flow) บนหน้าตัดใดๆ เมื่อพิจารณารูปที่ 5-3(ก) และ (ข) ชิ้นส่วนเล็กๆ ของท่อมีความยาวจำกัด s และความกว้าง เล็กๆ dx ที่ปลายด้านหนึ่งของชิ้นส่วนมีความหนา t_A และอีกปลายด้านหนึ่งมีความหนา t_B เนื่องจากโมเมนต์บิดที่กระทำ T หน่วยแรงเฉือนจะเกิดขึ้นบนผิวหน้าตัดที่แรเงาของชิ้นส่วน โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ที่ปลาย A หน่วยแรงเฉือนคือ τ_A และปลาย B คือ τ_B หน่วยแรงนี้จะมีความสัมพันธ์โดยแรงเฉือนเทียบเท่า τ_A และ τ_B ต้องกระทำบนด้านข้างตามยาวของชิ้นส่วน ดังที่แรเงาในรูปที่ 5-3(ข) เนื่องจากด้านข้างดังกล่าวนี้มีความหนาคงที่ τ_A และ τ_B แรงกระทำบนด้าน ดังกล่าวคือ $dF_A = \tau_A (t_A dx)$ และ $dF_B = \tau_B (t_B dx)$ สมดุลแรงต้องการแรงดังกล่าวนี้มีค่าขนาดเท่ากันแต่มีทิศทางตรงกันข้าม ดังนั้น

$$\tau_A t_A = \tau_A t_B$$

ผลสำคัญนี้จะกล่าวว่าผลคูณของหน่วยแรงเฉือนเฉลี่ยตามแนวยาวคูณกับความหนาของท่อจะมีค่าเท่ากันที่แต่ละจุดบนพื้นที่หน้าตัดของท่อ ผลคูณนี้เรียกว่า การไหลเฉือน q และโดยทั่วไปจะแสดงในรูปของ

$$q = \tau_{avg} t \qquad (5\text{-}1)$$

เนื่องจาก q มีค่าคงที่บนหน้าตัด หน่วยแรงเฉือนเฉลี่ยที่มากที่สุดจะเกิดขึ้นที่ความหนาแน่นของท่อที่มีค่าน้อยที่สุด

ถ้าชิ้นส่วนเล็กๆ มีความหนา t ความยาว ds และความกว้าง dx แยกออกจากท่อ ดังแสดงในรูปที่ 5-3(ค) พบว่า พื้นที่แรเงาที่หน่วยแรงเฉือนเฉลี่ยกระทำคือ dA = tds เมื่อ $dF = \tau_{avg} t \ \ ds = q \ \ ds$ หรือ q = dF/ds พูดอีกนัยหนึ่งว่า การไหลของหน่วยแรงเฉือนจะมีค่าคงที่บนพื้นที่หน้าตัดวัดเป็นแรงต่อหนึ่งหน่วยความยาวตามพื้นที่หน้าตัดของท่อ

พบว่าแรงย่อย หน่วยแรงเฉือน แสดงในรูปที่ 5-3(ค) ที่กระทำต่อท่อ แรงย่อยจะกระทำในทิศทางอื่นๆ ดังแสดงในรูปที่ 5-3(ง) จะไม่มี เนื่องจากผิวส่วนบนและส่วนล่างของชิ้นส่วนที่ผนังภายในและภายนอกของท่อ และขอบเขตดังกล่าวนี้จะมีอิสระของหน่วยแรง การบิดที่กระทำให้เกิดการไหลของหน่วยแรงเฉือนและหน่วยแรงเฉลี่ยที่มีทิศทางในแนวสัมผัสกับผนังของท่อ

5.3.2 หน่วยแรงเฉือนเฉลี่ย

หน่วยแรงเฉือนเฉลี่ย (average shear stress) กระทำต่อพื้นที่แรเงา τ_{avg} ของชิ้นส่วนเล็กๆ ในพื้นที่ที่แรเงา $dA = tds$ ดังแสดงในรูปที่ 5-3(ค) มีความสัมพันธ์กับโมเมนต์บิด โดยพิจารณาการบิดที่เกิดโดยหน่วยแรงเฉือนรอบจุด 0 ที่เลือกไว้ภายในขอบเขตของท่อ ดังแสดงในรูปที่ 5-3(จ) หน่วยแรงเฉือนทำให้เกิดแรง $dF = \tau_{avg} dA = \tau_{avg}(tds)$ บนชิ้นส่วน แรงนี้กระทำในแนวสัมผัสกับแนวเส้นกึ่งกลางของพื้นที่หน้าตัดของท่อ เนื่องจากแขนโมเมนต์ คือ h โมเมนต์บิดจะได้ว่า

$$dT \ = \ h(dF) \ = \ h(\tau_{avg} tds)$$

สำหรับหน้าตัดทั้งหมด จะได้

$$T \ = \ \oint h\tau_{avg} tds$$

เมื่อการอินทิกัลแนวเส้นบ่งบอกการอินทิเกรตนอกขอบเขตทั้งหมดของพื้นที่ เนื่องจากการไหลของหน่วยแรงเฉือน $q = \tau_{avg} t$ มีค่าคงที่ เทอมนี้สามารถเอาออกจากอินทิกัลป์ได้ ดังนั้น

$$T \ = \ \tau_{avg} t \oint hds$$

การแสดงให้เป็นรูปภาพอย่างง่าย สำหรับประเมินอินทิกัลป์โดยพื้นที่เฉลี่ย แสดงในรูปสามเหลี่ยมแรเงาในรูปที่ 5-3(จ) คือ $dA_m = (1/2)hds$ ดังนั้น

$$T \ = \ 2\tau_{avg} t \int dA_m \ = \ 2\tau_{avg} tA_m$$

ดังนั้นสมการ τ_{avg} จะได้ว่า

$$\tau_{avg} = \frac{T}{2tA_m} \tag{5-2}$$

เมื่อ

τ_{avg} = หน่วยแรงเฉือนเฉลี่ยที่กระทำตามแนวความหนาของท่อ

T = โมเมนต์บิดภายในที่หน้าตัด หาได้โดยวิธีภาคตัดและสมการของสมดุล

t = ความหนาของท่อที่ τ_{avg} ถูกคำนวณ

A_m = พื้นที่เฉลี่ยที่ปิดภายในขอบเขตของแนวเส้นกึ่งกลางของความหนาของท่อ A_m พื้นที่แรเงาดังแสดงในรูปที่ 5-3(ฉ) เนื่องจาก $q = \tau_{avg} t$ สามารถหาการไหลของหน่วยแรงเฉือนตลอดหน้าตัดโดยใช้สมการ

$$q = \frac{T}{2A_m} \tag{5-3}$$

5.3.3 มุมของการบิด

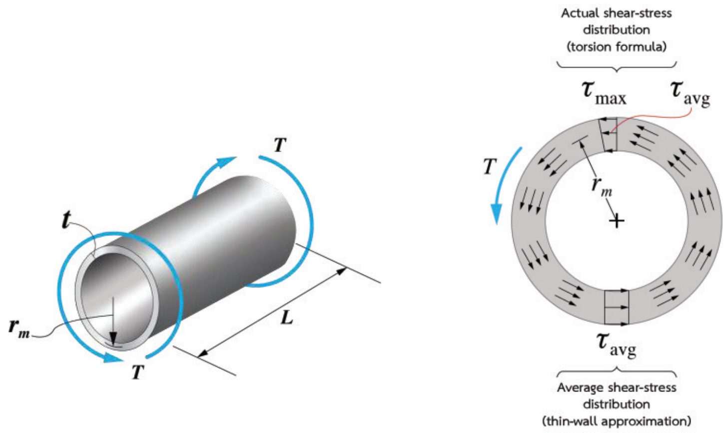
มุมของการบิด (angle of twist) ของท่อผนังบางที่มีความยาว L สามารถหาโดยใช้วิธีพลังงาน และการพัฒนาของสมการนี้กำหนดให้ใช้กับปัญหาที่มีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นเชิงเส้น และ G โมดูลัสของการเฉือนแบบยืดหยุ่น แล้วมุมนี้ ϕ จะมีหน่วยเป็นเรเดียน และแสดงได้ในรูปของ

$$\phi = \frac{TL}{4A_m^2 G} \oint \frac{ds}{t} \tag{5-4}$$

การอินทิเกรตจะทำรอบขอบเขตทั้งหมดของพื้นที่หน้าตัดของท่อ

ตัวอย่างที่ 5.2

จงหาหน่วยแรงเฉือนเฉลี่ยในท่อผนังบางที่มีหน้าตัดรูปวงกลมที่มีรัศมีเฉลี่ย r_m และความหนา t ที่ถูกกระทำด้วยโมเมนต์บิด T ดังแสดงในรูป นอกจากนั้น จงหามุมของการบิดที่วัดแบบสัมพัทธ์ถ้าท่อมีความยาว L



รูปตัวอย่างที่ 5.2

วิธีทำ

หน่วยแรงเฉือนเฉลี่ย (average shear stress) พื้นที่เฉลี่ยสำหรับท่อ คือ $A_m = \pi r_m^2$ ใช้สมการที่ 5-2 จะได้ว่า

$$\tau_{avg} = \frac{T}{2tA_m} = \frac{T}{2\pi t\ r_m^2} \qquad \text{ตอบ}$$

ตรวจสอบการใช้ได้ของผลนี้โดยประยุกต์ใช้สมการการบิด ในกรณีนี้โดยใช้สมการ $J = \frac{\pi}{2}(C_0^4 - C_i^4)$ จะได้ว่า

$$J = \frac{\pi}{2}(r_0^4 - r_i^4)$$

$$= \frac{\pi}{2}(r_0^2 + r_i^2)(r_0^2 - r_i^2)$$

$$= \frac{\pi}{2}(r_0^2 + r_i^2)(r_0 - r_i)(r_0 + r_i)$$

เนื่องจาก $r_m \approx r_0 \approx r_l$ และ $t = r_0 - r_i$, $J = \frac{\pi}{2}(2r_m^2)(2r_m)\, t = 2\pi r_m^3 t$

ดังนั้น

$$\tau_{avg} \quad = \quad \frac{Tr_m}{J} = \frac{Tr_m}{2\pi r_m^3 t} = \frac{T}{2\pi r_m^2 t} \qquad \text{ตอบ}$$

ซึ่งเป็นไปตามผลก่อนหน้านี้

การกระจายหน่วยแรงเฉือนที่กระทำผ่านทะลุหน้าตัดของท่อ นอกจากนั้นการกระจายหน่วยแรงเฉือนที่กระทำบนแนวเส้นรัศมีที่คำนวณโดยใช้สมการการบิด แต่ละ τ_{avg} กระทำในทิศทางที่ให้การบิดลัพธ์ T ที่ภาคตัดเมื่อความหนาของท่อลดลง หน่วยแรงเฉือนที่ทะลุผ่านท่อจะมีความสม่ำเสมอมากขึ้น

มุมของการบิด (angle of twist) ประยุกต์ใช้สมการที่ 5-4 จะได้ว่า

$$\phi \quad = \quad \frac{TL}{4A_m^2 G}\oint \frac{ds}{t} \; = \; \frac{TL}{4(\pi r_m^2)^2 Gt}\oint ds$$

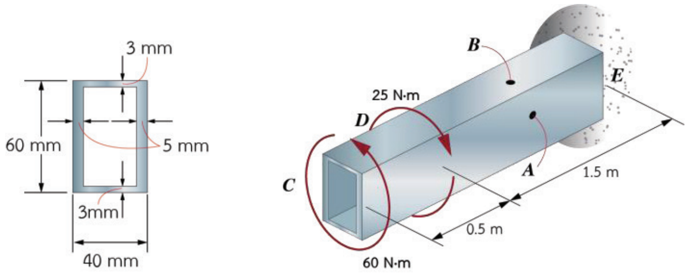
การอินทีกัลป์แทนความยาวรอบขอบเขตตามแนวเส้นกึ่งกลาง คือ $2\pi r_m$ แทนค่าในสูตรและผลสุดท้าย คือ

$$\phi \quad = \quad \frac{TL}{2\pi r_m^3 Gt} \qquad \text{ตอบ}$$

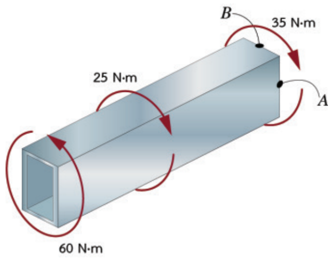
ผลลัพธ์เท่ากับคำตอบที่ได้จากสมการ $\phi = \frac{TL}{JG}$

ตัวอย่างที่ 5.3

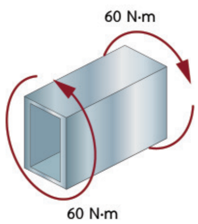
ท่อทำจากทองสัมฤทธิ์ C86100 และมีหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าดังแสดงในรูป ถ้าถูกกระทำด้วยโมเมนต์บิดทั้งสอง จงคำนวณหาหน่วยแรงเฉือนเฉลี่ยในท่อที่จุด A และ B นอกจากนั้น จงหามุมของการบิดของปลาย C เมื่อท่อถูกยึดแน่นกับที่ E (G = 38 GPa)



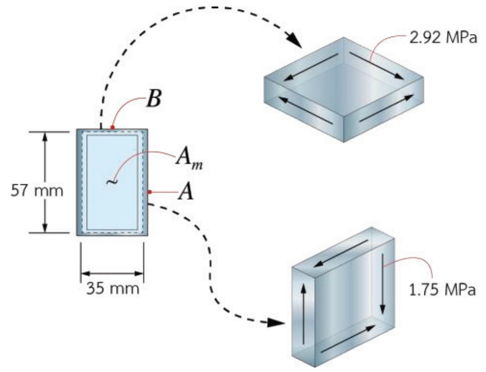
(ก)



(ข)



(ค)



(ง)

รูปตัวอย่างที่ 5.3

วิธีทำ

หน่วยแรงเฉือนเฉลี่ย (average shear stress) ถ้าท่อมีภาคตัดผ่านจุด A และ B ผังวัตถุอิสระลัพธ์แสดงในรูป โมเมนต์บิดภายใน คือ 35 N.m พื้นที่ A_m คือ

$$A_m = (0.035\,\mathrm{m})(0.057\,\mathrm{m}) = 0.00200\,\mathrm{m}^2$$

ประยุกต์ใช้สมการที่ 5-2 สำหรับจุด $A, t_A = 5\ \mathrm{mm}$ ดังนั้น

$$\tau_A = \frac{T}{2tA_m} = \frac{35\,\mathrm{N.m}}{2(0.005\,\mathrm{m})(0.00200\,\mathrm{m}^2)} = 1.75\,\mathrm{MPa}$$

สำหรับจุด $B, t_B = 3\ \mathrm{mm}$ ดังนั้น

$$\tau_B = \frac{T}{2tA_m} = \frac{35\,\mathrm{N.m}}{2(0.003\,\mathrm{m})(0.00200\,\mathrm{m}^2)} = 2.92\,\mathrm{MPa}$$

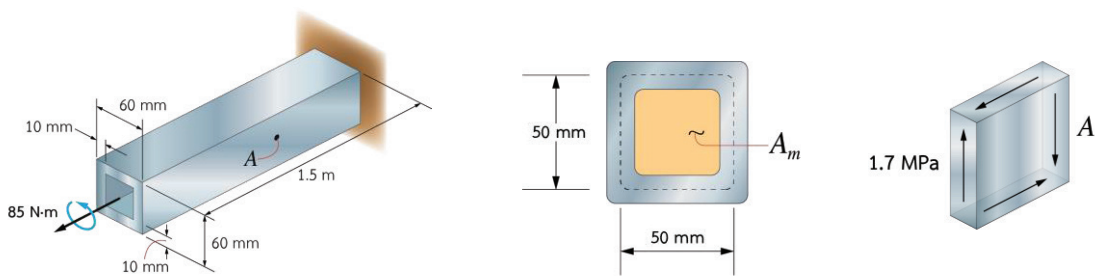
ผลดังกล่าวนี้แสดงบนชิ้นส่วนของวัสดุที่จุด A และ B ดังแสดงในรูป (จ) ควรสังเกตโมเมนต์บิดขนาด 35 N.m ที่ทำให้เกิดหน่วยแรงดังกล่าวนี้บนผิวหน้าที่แรเงาของแต่ละชิ้นส่วน

มุมของการบิด (angle of twist) จากผังวัตถุอิสระในรูป โมเมนต์บิดภายในขอบเขต DE และ CD คือ 35 N.m และ 60 N.m ตามลำดับ ใช้สัญลักษณ์ของเครื่องหมายจากหัวข้อเรื่องมุมของการบิด โมเมนต์บิดดังกล่าวนี้มีค่าเป็นบวก ดังนั้นสมการที่ 5-4 จะกลายเป็น

$$
\begin{aligned}
\phi &= \sum \frac{TL}{4A_m^2 G} \oint \frac{ds}{t} \\
&= \frac{60\,\text{N.m}\,(0.5\,\text{m})}{4(0.00200\,\text{m}^2)^2\,(38(10^9)\,\text{N/m}^2)}\left[2\left(\frac{57\,\text{mm}}{5\,\text{mm}}\right)+2\left(\frac{35\,\text{mm}}{3\,\text{mm}}\right)\right] \\
&\quad + \frac{35\,\text{N.m}\,(1.5\,\text{m})}{4(0.00200\,\text{m}^2)^2\,(38(10^9)\,\text{N/m}^2)}\left[2\left(\frac{57\,\text{mm}}{5\,\text{mm}}\right)+2\left(\frac{35\,\text{mm}}{3\,\text{mm}}\right)\right] \\
&= 6.29(10^{-3})\,\text{rad}
\end{aligned}
$$

<u>ตัวอย่างที่ 5.4</u>

ท่ออลูมิเนียม 2014-T6 รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีมิติดังแสดงในรูป จงคำนวณหาหน่วยแรงเฉือนเฉลี่ยในท่อที่จุด A ถ้าท่อถูกกระทำด้วยโมเมนต์บิด 85 N.m นอกจากนั้นจงหามุมของการบิดเนื่องจากโมเมนต์บิดนี้ กำหนด G_{al} = 26 GPa



รูปตัวอย่างที่ 5.4

วิธีทำ

หน่วยแรงเฉือนเฉลี่ย (average shear stress) โดยการตรวจสอบการบิดลัพธ์ภายในหน้าตัดที่จุด A คือ T = 85 N.m จากรูป พื้นที่ A_m ถูกแรเงามีค่า

$$A_m = (50\,mm)(50\,mm) = 2500\,mm^2$$

ประยุกต์ใช้สมการที่ 5-2

$$\tau_{avg} = \frac{T}{2tA_m} = \frac{85\,N.m(10^3\,mm/m)}{2(10\,mm)(2500\,mm^2)} = 1.7\,N/mm^2 \qquad \text{ตอบ}$$

เนื่องจาก t มีค่าคงที่ยกเว้นที่มุม หน่วยแรงเฉือนเฉลี่ยจึงมีค่าเท่ากันที่จุดทั้งหมดบนหน้าตัด แสดงผลการกระทำบนชิ้นส่วนที่จุด A ในรูป พบว่า τ_{avg} กระทำในทิศพุ่งขึ้นจากผิวหน้าที่แรงเงาเนื่องจากโมเมนต์บิดลัพธ์ภายใน T ที่ภาคตัด

มุมของการบิด (angle of twist) มุมของการบิดเกิดโดย T หาได้จากสมการที่ 5-4 นั่นคือ

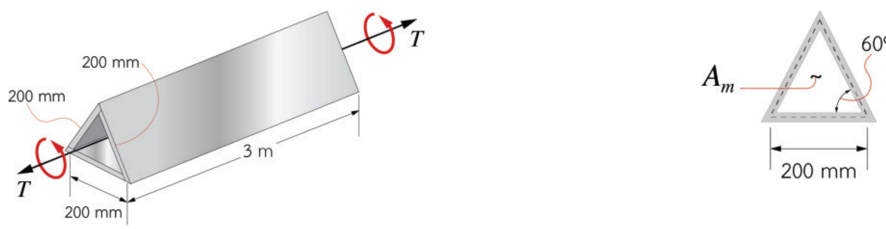
$$\phi = \frac{TL}{4A_m^2G}\oint\frac{ds}{t} = \frac{85\,N.m(10^3\,mm/m)(1.5\,m)(10^3\,mm/m))}{4(2500\,mm^2)^2[26(10^3)\,N/mm^2]}\oint\frac{ds}{(10\,mm)}$$

การอินทีกัลป์ตลอดความยาวรอบขอบเขตแนวเส้นตรงกลางของท่อ ดังนั้น

$$\phi = 0.196(10^{-4})\,mm^{-1}[4(50\,mm)] = 3.92(10^{-3})\,rad \qquad \text{ตอบ}$$

ตัวอย่างที่ 5.5

ท่อบางทำจากแผ่นเหล็กบาง A-36 ทั้งสามที่มีความหนา 5 mm ซึ่งมีหน้าตัดรูปสามเหลี่ยมดังแสดงในรูป จงคำนวณหาโมเมนต์บิดที่มากที่สุด T ที่กระทำต่อแผ่นเหล็กบาง ถ้าหน่วยแรงเฉือนที่ยอมรับได้ τ_{allow} = 90 MPa และท่อถูกจำกัดให้บิดได้ไม่เกิน $\phi = 2(10^{-3})\,rad$



รูปตัวอย่างที่ 5.5

<u>วิธีทำ</u>

พื้นที่แรเงา A_m ดังแสดงในรูป คือ

$$A_m = \frac{1}{2}(200\,\text{mm})(200\,\text{mm}\sin 60^\circ)$$

$$= 17.32(10^3)\,\text{mm}^2\,(10^{-6}\,\text{m}^2/\text{mm}^2) = 17.32(10^{-3})\,\text{m}^2$$

หน่วยแรงเฉือนเฉลี่ยมากที่สุดเกิดขึ้นที่จุดที่มีความหนาของท่อน้อยที่สุด ซึ่งอยู่ตามด้านข้างและไม่ได้อยู่ที่มุม ประยุกต์ใช้สมการที่ 5-2 เมื่อ $t = 0.005$ m จะได้ว่า

$$T_{avg} = \frac{T}{2tA_m}; \quad 90(10^6)\,\text{N/m}^2 = \frac{T}{2(0.005\,\text{m})(17.32(10^{-3})\,\text{m}^2)}$$

$$T = 15.6\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

นอกจากนั้น จากสมการที่ 5-4 จะได้

$$\phi = \frac{TL}{4A_m^2G}\oint\frac{ds}{t}$$

$$0.002\,\text{rad} = \frac{T(3\,\text{m})}{4(17.32(10^{-3})\,\text{m}^2\,[75(10^9)\,\text{N/m}^2])}\oint\frac{ds}{(0.005\,\text{m})}$$

$$300.0 = T\oint ds$$

การอินทีกัลป์แทนผลรวมของมิติด้านข้างทั้งสาม นั่นคือ

$$300.0 = T\left[3(0.20\,\text{m})\right]$$

$$T = 500\ \text{N.m}$$ ตอบ

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 5

1) แท่งอลูมิเนียมหน้าตัดสี่เหลี่ยมจัตุรัส ขนาดหน้าตัด 10 mm × 10 mm ยาว 8 m จงหา T สูงสุด เมื่อกำหนดให้ มุมบิดสูงสุดเป็น 90° ค่า G_{al} = 28 GPa และ $(\tau_y)_{al}$ = 240 MPa

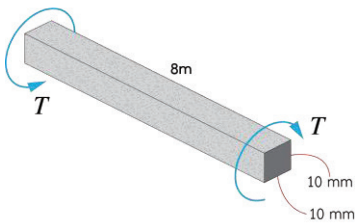
2) ท่อพลาสติกมีแรงบิดกระทำ 150 N.m จงหาค่า a เมื่อกำหนดหน่วยแรงดัดที่ยอมให้ τ_{allow} = 60 MPa และความหนาท่อพลาสติก t = 3 mm (ไม่คิดผลที่เกิดจากหน่วยแรงที่เกิดขึ้นที่มุมท่อ)

3) ท่อพลาสติกมีแรงบิดกระทำ 150 N.m จงหาค่า τ_{ay} ที่เกิดขึ้น เมื่อ a = 200 mm และความหนาท่อพลาสติก t = 3 mm (ไม่คิดผลที่เกิดจากหน่วยแรงที่เกิดขึ้นที่มุมท่อ)

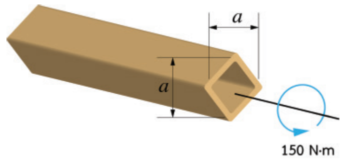
4) จงเปรียบเทียบค่าหน่วยแรงเฉือนมากที่สุดแบบอิลาสติกและมุมของการบิดของวัสดุที่ทำจากโลหะสแตนเลส 304 ที่มีหน้าตัดวงกลม (circular) และสี่เหลี่ยมจัตุรัส (square) เมื่อพื้นที่หน้าตัดของแท่งวัตถุคือ 9 in.^{2} ยาว 36in. และต้องรองรับแรงกระทำโมเมนต์บิดขนาด 4000 lb.in.

5) เพลาทำจากเซรามิค หน่วยแรงเฉือนที่ยอมรับได้ τ_{allow} = 7 ksi และโมดูลัสของการเฉือน G_C = 2.8 (10^3) เมื่อเพลาหน้าตัดสามเหลี่ยมด้านเท่ายาว a เมื่อถูกกระทำด้วยโมเมนต์บิด 15 จงคำนวณหาขนาดของความยาว A และมุมของการบิดที่ปลาย B

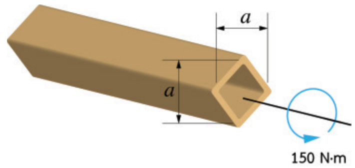
6) แท่งอะลูมิเนียม 2014-T6 ยึดติดแน่นกับผนังทั้งสองข้างที่จุด A และ B ถ้าแท่งมีหน้าตัด 2 in. × 2 in. และถูกกระทำโดยโมเมนต์บิดดังแสดงในรูป จงคำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับทั้งสองและมุมของการบิดที่จุด C



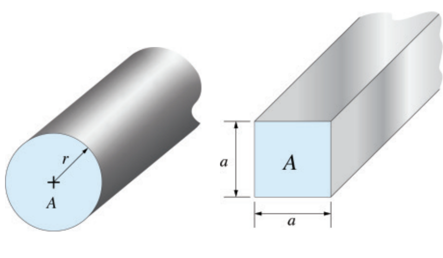
รูปแบบฝึกหัดข้อ 1)



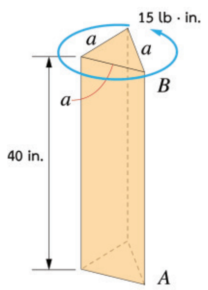
รูปแบบฝึกหัดข้อ 2)



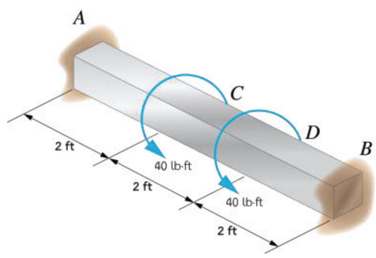
รูปแบบฝึกหัดข้อ 3)



รูปแบบฝึกหัดข้อ 4)



รูปแบบฝึกหัดข้อ 5)

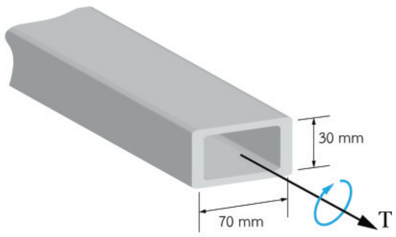


รูปแบบฝึกหัดข้อ 6)

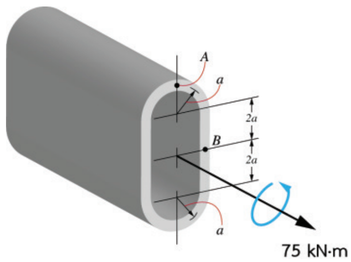
7) ท่อสแตนเลส 304 มีความหนา 10 mm ถูกกระทำโดยโมเมนต์บิดขนาด T = 50 N.m จงคำนวณหาหน่วยแรงเฉือนเฉลี่ยที่เกิดขึ้นในท่อสแตนเลสไม่ต้องคิดผลของความเข้มของแรงกระทำที่มุมของกล่อง ขนาดของกล่องดังแสดงในรูป

8) ท่ออะลูมิเนียม A6061-T6 ถูกกระทำด้วยโมเมนต์บิดขนาด 75 kN.m (ก) จงคำนวณหาขนาดของ a ที่เล็กที่สุดเมื่อท่อมีความหนา 7 mm และหน่วยแรงเฉือนที่ยอมรับได้คือ τ_{allow} = 125 MPa ถ้าท่อมีความยาว 2 m (ข) จงคำนวณหามุมที่หมุนไปที่ปลายเทียบกับอีกปลายด้านหนึ่ง

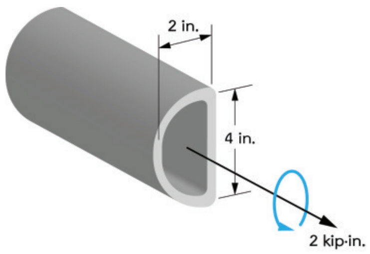
9) โมเมนต์บิดขนาด 2 kip.in. กระทำต่อท่อดังแสดงในรูป ท่อมีความหนา 0.1 in. จงคำนวณหาหน่วยแรงเฉือนเฉลี่ยของท่อ ไม่ต้องคิดผลของความเข้มแข็งของแรงกระทำที่มุมของวัสดุ



รูปแบบฝึกหัดข้อ 7)



รูปแบบฝึกหัดข้อ 8)



รูปแบบฝึกหัดข้อ 9)

บทที่ 6
คานประกอบ

6.1 บทนำ

คาน (beam) เป็นชิ้นส่วนโครงสร้างที่มักจะอยู่ในแนวราบเชื่อมต่อกับชิ้นส่วนในแนวดิ่ง เช่น เสาหรือผนัง ปกติคานมีรูปหน้าตัดสี่เหลี่ยมผืนผ้าเพื่อให้ง่ายต่อการวิเคราะห์ออกแบบ ก่อสร้างง่าย และประหยัด แต่คานอาจจะมีรูปหน้าตัดอื่นๆ ได้ตามความจำเป็น เช่น คานตัวที (tee beam) เพิ่มความแข็งแรงกว่าคานหน้าตัดสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยในอดีตคานอาจทำด้วยวัสดุชนิดเดียว คือ ไม้ หิน เหล็ก เป็นต้น ซึ่งยังมีการใช้ในปัจจุบันอยู่ ส่วนคานที่เป็นที่นิยมในอุตสาหกรรมก่อสร้างใช้ข้อดีของวัสดุสองชนิดขึ้นไป นำมาใช้อย่างแพร่หลาย อาจทำด้วยคอนกรีตเสริมเหล็กหรือคอนกรีตเสริมลวดอัดแรง ขึ้นอยู่กับปัจจัยหรือเหตุผล เช่น ช่วงคาน น้ำหนักบรรทุกหรือแรง ความประหยัดหรือเหตุผลทางมิติ รูปลักษณ์ ในหัวข้อนี้กล่าวถึงการวิเคราะห์ความเค้นดัดของคานที่ทำจากวัสดุสองชนิดขึ้นไป ตามสมมุติฐานที่วัสดุมีการส่งถ่ายแรงต่อกันโดยสมบูรณ์

6.2 คานประกอบ

คานประกอบ (composite beams) คือ คานที่มีวัสดุตั้งแต่สองชนิดขึ้นไปมาทำเป็นโครงสร้าง เช่น คานที่สร้างจากไม้และมีแถบเหล็กประกบทั้งส่วนบนและล่าง ดังแสดงในรูปที่ 6-1(ก) หรือโดยทั่วไปคานคอนกรีตเสริมด้วยเหล็ก ดังแสดงในรูปที่ 6-1(ข) วิศวกรต้องออกแบบคานประกอบนี้เพื่อรับแรงดัดที่ต้องการด้วยการประยุกต์จากพื้นฐานเรื่องความเค้น หัวข้อนี้จะใช้วิธีการแปลงหน้าตัดของคานประกอบจากวัสดุหลายชนิดเพื่อวิเคราะห์ความเค้นดัดให้ง่ายขึ้นเป็นเสมือนการวิเคราะห์แรงดัดของวัสดุชนิดเดียวกัน วิธีการดังกล่าวนี้สมการความเค้นดัด $\left(\sigma = \dfrac{My}{I}\right)$ จะสามารถนำมาวิเคราะห์หาความเค้นที่เกิดกับวัสดุแต่ละชนิดได้

การประยุกต์ใช้วิธีการแปลงหน้าตัดพิจารณาคานประกอบที่มีวัสดุ 2 ชนิด ซึ่งมีพื้นที่หน้าตัดแสดงในรูปที่ 6-2(ก) ถ้ามีโมเมนต์ดัดกระทำต่อคานนี้แล้วคานมีลักษณะเป็นเนื้อเดียวกัน พื้นที่หน้าตัดทั้งหมดจะยังคงอยู่ในระนาบหลังจากเกิดหน่วยแรงดัด และความเครียดตั้งฉากปกติจะแปรค่าแบบเชิงเส้นจากค่าศูนย์ที่แกนสะเทินไปยังค่าที่มากที่สุดในวัสดุที่อยู่ไกลจากแกนนี้ ดังรูปที่ 6-2(ข) วัสดุจะมีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นเชิงเส้น ประยุกต์ใช้กฎของฮุคและที่จุดใดๆ หน่วยแรงตั้งฉากปกติในวัสดุที่หนึ่งหาได้จากสมการ $\sigma = E\varepsilon$ โดยทำนองเดียวกัน วัสดุที่สองความแข็งแรงจะน้อยกว่าวัสดุที่หนึ่ง นั่นคือ เหล็กกับยาง แรงส่วนใหญ่จะรองรับโดยวัสดุที่หนึ่ง สมมุติเป็นกรณีการกระจายหน่วยแรงจะเหมือนในรูปที่ 6-2(ค) หรือ (ง) โดยเฉพาะ พบว่าการเปลี่ยนแปลงอย่างฉับพลันของค่าหน่วยแรงที่เกิดขึ้นที่จุดต่อ

ของวัสดุเมื่อความเครียดเท่ากัน แต่เนื่องจากโมดูลัสของความยืดหยุ่นหรือความแข็งเกร็งของวัสดุเกิดการเปลี่ยนแปลงทันทีทันใด การกระจายหน่วยแรงทำให้เกิดแรงลัพธ์เป็นศูนย์บนหน้าตัดและโมเมนต์ดัดทำให้เกิดหน่วยแรงรอบแกนสะเทินมีค่าเท่ากับ M

วิธีการอย่างง่ายเพื่อให้เป็นไปตามเงื่อนไขทั้งสองนี้ จะต้องทำการแปลงคานเป็นวัสดุเนื้อเดียวกัน ยกตัวอย่างเช่น ถ้าคานประกอบด้วยวัสดุที่แข็งแกร่งน้อยกว่า ดังรูปที่ 6-2(จ) เมื่อความสูงของคานคงเดิม เนื่องจากการกระจายความเครียดดังรูปที่ 6-2(ข) อย่างไรก็ตาม ส่วนบนของคานจะกว้างมากเมื่อรับน้ำหนักกระทำเทียบเท่ากับที่รับโดยวัสดุแข็งแกร่ง ในรูปที่ 6-2(ค) ความกว้าง หาจาก dF กระทำบนพื้นที่ $dA = dz\ dy$ ของคานในรูปที่ 6-2(ก) $dF = \sigma dA = (E_1\varepsilon)dzdy$ หรือพูดอีกนัยหนึ่งว่าถ้าความกว้างของชิ้นส่วนที่สอดคล้องกันที่มีความสูง dy ดังแสดงในรูปที่ 6-2(จ) คือ ndz ดังนั้น $dF' = \sigma dA' = (E_2\varepsilon)\,ndydz$ เทียบกับแรงดังกล่าวแล้ว จะได้ว่า

$$E_1\varepsilon dzdy = E_2\varepsilon ndzdy$$

หรือ

$$n = \frac{E_1}{E_2} \qquad (6\text{-}1)$$

(ก) (ข)

รูปที่ 6-1 ตัวอย่างคานประกอบจากวัสดุต่างชนิด

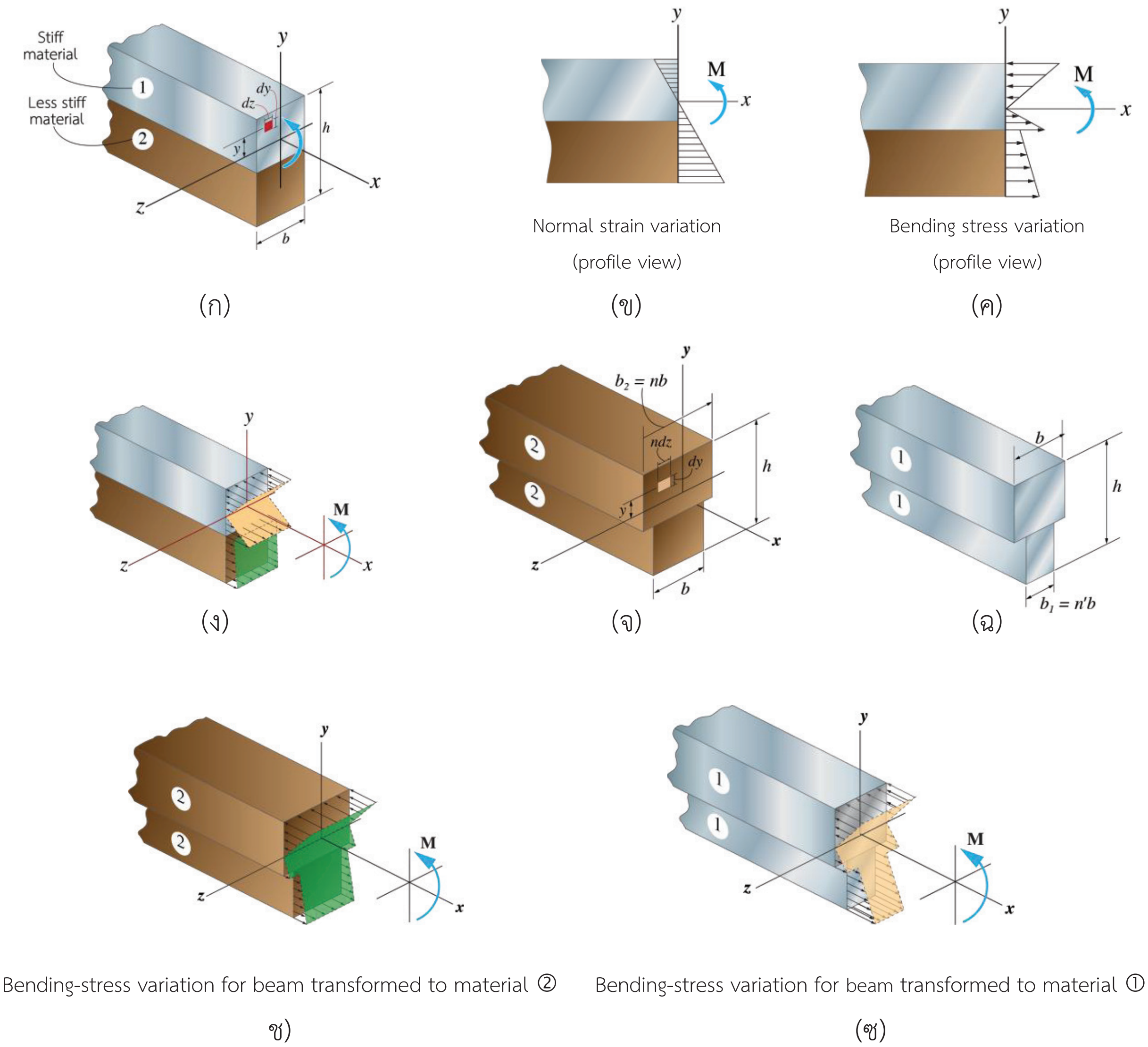
n = แฟกเตอร์การแปลง (transformation factor) พบว่า หน้าตัดที่มีความกว้าง b บนคานที่เริ่มแรก ดังแสดงในรูปที่ 6-2(ก) จะเพิ่มความกว้างขึ้นเป็น $b_2 = nb$ ในขอบเขต วัสดุที่ 2 ดังรูปที่ 6-2(จ) ในทำนองเดียวกัน ถ้าวัสดุที่มีความแข็งแกร่งน้อยกว่า จะแปลงเป็นวัสดุที่แข็งแกร่งกว่าหน้าตัดจะเหมือนดังแสดงในรูปที่ 6-2(ฉ) เมื่อความกว้างของวัสดุ 2 เปลี่ยนแปลงไปเป็น $b_1 = n'b$ เมื่อ $n' = E_2 / E_1$ พบว่าในกรณีนี้ แฟกเตอร์การแปลง n' จะมีค่าน้อยกว่าหนึ่ง เนื่องจาก $E_1 > E_2$ พูดอีกนัยหนึ่งว่าต้องใช้วัสดุที่มีความแข็งแกร่งน้อยกว่าเพื่อรองรับโมเมนต์ดัดที่กำหนด

เมื่อคานถูกทำเป็นเนื้อเดียวกัน การกระจายหน่วยแรงตั้งฉากปกติบนหน้าตัดแปลงจะมีค่าแบบเชิงเส้นดังแสดงในรูปที่ 6-2(ช) และ (ซ) ดังนั้น สามารถหาจุดเซนทรอยด์ (แกนสะเทิน) และโมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่แปลง และประยุกต์ใช้สมการการดัดเพื่อหาหน่วยแรง ที่แต่ละจุดบนคานแปลง พึงระลึกว่า หน่วยแรงในคานตัดแปลงมีค่าเทียบเท่ากับหน่วยแรงในวัสดุที่เหมือนกันในคานที่แท้จริง สำหรับวัสดุที่ถูกแปลงหน้าตัด หน่วยแรงสามารถหาบนภาคตัดแปลงจะคูณด้วยแฟกเตอร์การแปลง n หรือ n' เนื่องจากพื้นที่ของวัสดุแปลง

$$dF = \sigma dA = \sigma' dA'$$

$$\sigma dz\,dy = \sigma' n dz\,dy$$

$$\sigma = n\sigma' \qquad (6\text{-}2)$$

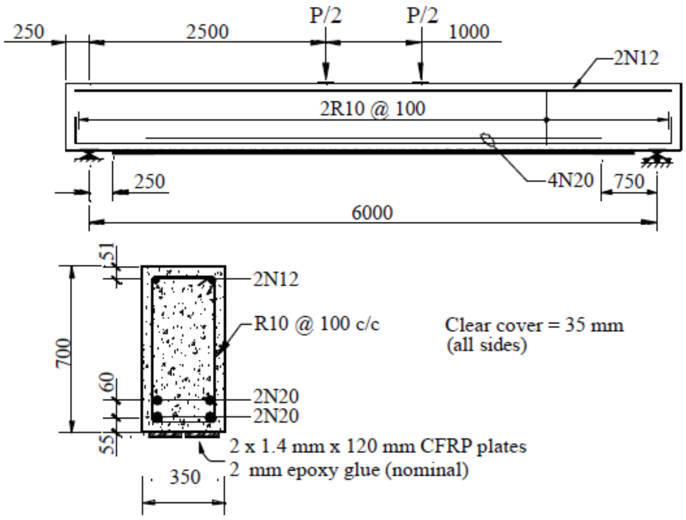


รูปที่ 6-2 การประยุกต์ใช้วิธีการแปลงหน้าตัดกับพิจารณาคานประกอบที่มีวัสดุ 2 ชนิด

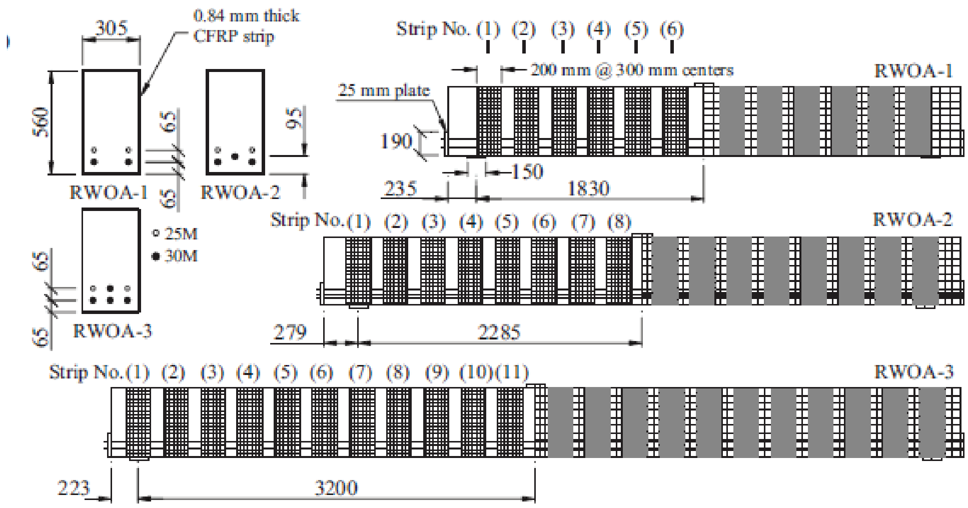
หลักการนี้ได้นำไปประยุกต์ใช้ในงานซ่อมและเสริมกำลังโครงคอนกรีตเสริมเหล็กด้วยวัสดุต่างๆ เช่น แผ่นเหล็ก หรือ คานเหล็ก เพื่อปรับปรุงให้อาคารสามารถรับน้ำหนักบรรทุกเพิ่มขึ้น อย่างไรก็ตามวิธีที่ได้รับความนิยมมากที่สุดในปัจจุบัน ได้แก่ การเสริมกำลังด้วยวัสดุคาร์บอนไฟเบอร์ (CFRP) ในด้านการรับแรงดึง เนื่องจากสามารถติดตั้งได้ง่าย น้ำหนักเบา รับแรงดึงสูง และทนต่อสภาวะสิ่งแวดล้อมที่รุนแรง ติดตั้งได้ทั้งภายในและภายนอกอาคาร ขั้นตอนการติดตั้งสรุปโดยง่าย คือ ทำความสะอาดพื้นผิว, ทาสารอีพ็อกซี่ และติดตั้งแผ่น CFRP โดยประยุกต์ทำได้หลายรูปแบบขึ้นอยู่กับลักษณะการเสริมกำลังของโครงสร้าง

การติดตั้งที่ผิวด้านล่างซึ่งเป็นลักษณะที่ปฏิบัติตามปกติช่วยเสริมกำลังรับโมเมนต์ดัดของคาน ทั้งนี้จะต้องใช้ความรู้พื้นฐานในการแปลงหน้าตัด ซึ่งมีวัสดุ 3 ชนิด คือ คอนกรีต เหล็ก และCFRP นำไปคำนวณออกแบบตามมาตรฐานการออกแบบต่อไป ดังแสดงตัวอย่างการประยุกต์ใช้ในรูปที่ 6-3 อย่างไรก็ดีผู้ใช้งานควรตระหนักถึงคุณสมบัติของอีพ็อกซี่ การเตรียมพื้นผิว และข้อควรระวังต่างๆ เพื่อให้การประยุกต์ใช้ให้ผลดีตามต้องการ

ตัวอย่างผลการทดสอบของคานเสริมกำลังด้วยแผ่น CFRP [4] ในรูปที่ 6-3 มีพฤติกรรมตามทฤษฎีการแปลงหน้าตัด เฉพาะในช่วงแรกที่แรงกระทำที่วัสดุทั้งหมดอยู่ในความเค้นช่วงยืดหยุ่น ในสมมุติฐานที่แผ่น CFRP อีพ็อกซี่และคอนกรีตยึดติดกันโดยสมบูรณ์ (perfect bond) จนกระทั่งแรงยึดเหนี่ยวระหว่างแผ่น CFRP และคอนกรีต (bonding interface) มีค่าการเลื่อนไถล (slip) ที่ค่อนข้างมาก การถ่ายแรงไม่สมบูรณ์ จึงทำให้พฤติกรรมของคานแตกต่างจากทฤษฎี จึงจำเป็นต้องทดสอบพฤติกรรมที่ซับซ้อนของคานประกอบและแรงยึดเหนี่ยวระหว่างวัสดุดังกล่าว



(ก)



(ข)

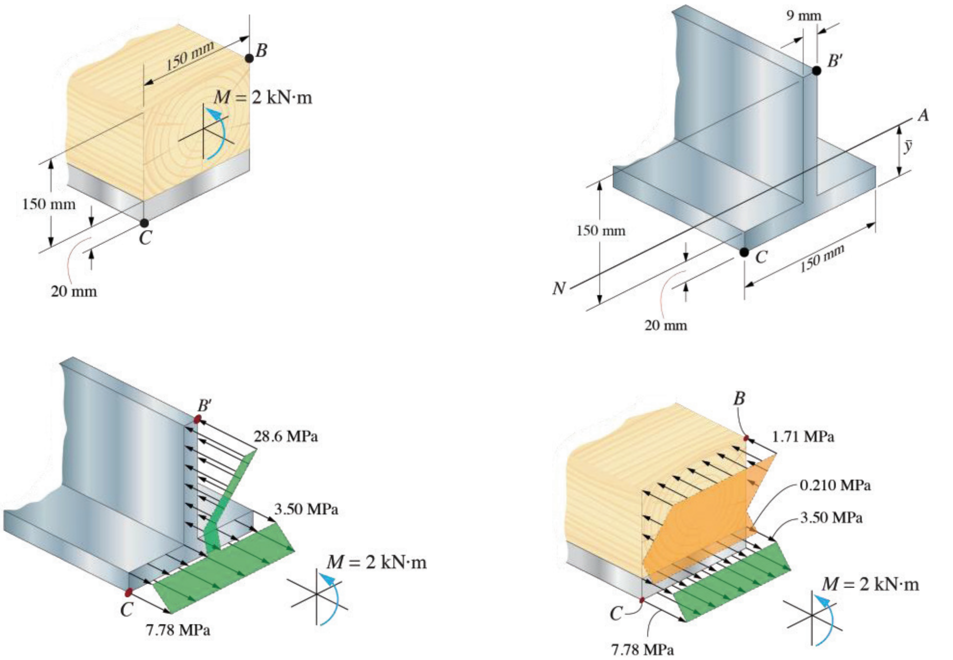
รูปที่ 6-3 ตัวอย่างการซ่อมและการเสริมกำลังคานด้วย CFRP (ก) การเสริมกำลังรับแรงดัด และ (ข) การเสริมกำลังรับแรงเฉือน [4]

ตัวอย่างที่ 6.1

คานประกอบด้วยไม้ เสริมด้วยแผ่นเหล็กที่ด้านใต้ ซึ่งมีพื้นที่หน้าตัดแสดงในรูป ถ้าคานนี้ถูกกระทำด้วยโมเมนต์ดัด M = 2 kN.m จงคำนวณหาหน่วยแรงตั้งฉากปกติที่จุด B และ C กำหนดให้ E_w = 12 GPa และ E_{st} = 200 GPa

วิธีทำ

คุณสมบัติของภาคตัด (section properties) ถึงแม้มีหลายวิธีให้เลือกใช้การแปลงหน้าตัดทั้งหมดให้เป็นเหล็ก เนื่องจากเหล็กมีค่าความแข็งตัวสูงกว่าไม้ $E_{st} > E_w$ ความกว้างของไม้จะถูกลดลงเพื่อทำให้เทียบเท่ากับเหล็ก ดังนั้น n จะมีค่าน้อยกว่าหนึ่ง สำหรับกรณีนี้ $n = E_w / E_{st}$



รูปตัวอย่างที่ 6.1

$$b_{st} = nb_w = \frac{12\,\text{GPa}}{200\,\text{GPa}}(150\,\text{mm}) = 9\,\text{mm}$$

การแปลงหน้าตัดได้แสดงไว้ในรูป

จุดศูนย์ถ่วง (แกนสะเทิน) หาได้จากการอ้างอิงจากจุดล่างสุดของหน้าตัด คือ

$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}A}{\sum A} = \frac{[0.01\,\text{m}](0.02\,\text{m})(0.150\,\text{m}) + [0.095\,\text{m}](0.009\,\text{m})(0.150\,\text{m})}{(0.02\,\text{m})(0.150\,\text{m}) + (0.009\,\text{m})(0.150\,\text{m})}$$

$$= 0.03638\ \text{m}$$

โมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่รอบแกนสะเทินจึงมีค่าเท่ากับ

$$
\begin{aligned}
I_{NA} &= \left[\frac{1}{12}(0.150\,\mathrm{m})(0.02\,\mathrm{m})^3+(0.150\,\mathrm{m})(0.02\,\mathrm{m})(0.03638\,\mathrm{m}-0.01\,\mathrm{m})^2\right] \\
&\quad +\left[\frac{1}{12}(0.009\,\mathrm{m})(0.150\,\mathrm{m})^3+(0.009\,\mathrm{m})(0.150\,\mathrm{m})(0.095\,\mathrm{m}-0.03638\,\mathrm{m})^2\right] \\
&= 9.358(10^{-6})\,\mathrm{m}^4
\end{aligned}
$$

หน่วยแรงตั้งฉากปกติ (normal stress) หาได้จากการใช้สมการการดัด หน่วยแรงตั้งฉากที่ B' และ C เท่ากับ

$$\sigma_{B'} = \frac{2\,\mathrm{kN.m}(0.170\,\mathrm{m}-0.03638\,\mathrm{m})}{9.358(10^{-6})\,\mathrm{m}^4} = 28.56\,\mathrm{MPa}$$

$$\sigma_C = \frac{2\,\mathrm{kN.m}(0.03638\,\mathrm{m})}{9.358(10^{-6})\,\mathrm{m}^4} = 7.78\,\mathrm{MPa} \qquad \text{ตอบ}$$

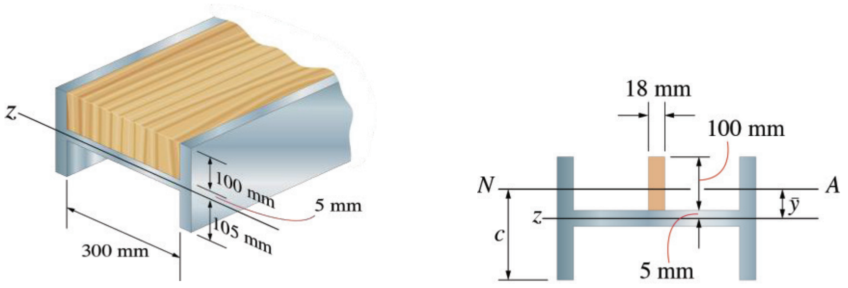
ลักษณะหน่วยแรงตั้งฉากปกติที่กระจายบนหน้าตัดที่แปลงขนาดแล้ว (เป็นเหล็กทั้งหมด) ดังแสดงในรูป หน่วยแรงตั้งฉากปกติในไม้ที่กระทำ ณ จุด B ดังแสดงในรูป) สามารถหาได้จากสมการที่ 6-2 จะได้ว่า

$$\sigma_B = n\sigma_{B'} = \frac{12\,\mathrm{GPa}}{200\,\mathrm{GPa}}(28.56\,\mathrm{MPa}) = 1.71\,\mathrm{MPa} \qquad \text{ตอบ}$$

ใช้หลักการเหล่านี้จะได้ค่าหน่วยแรงตั้งฉากปกติในเหล็กและไม้ที่จุดสัมผัสคือ σ_{st} = 3.50 MPa และ σ_w = 0.210 MPa ตามลำดับ หน่วยแรงตั้งฉากปกติที่กระจายในคานดังแสดงในรูป

ตัวอย่างที่ 6.2

คานเหล็กเสริมด้วยแผ่นไม้โอ๊คระหว่างปีกของคาน ดังแสดงในรูป มีค่าหน่วยแรงตั้งฉากปกติที่ยอมรับได้สำหรับเหล็กเท่ากับ $(\sigma_{allow})_{st}$ = 168 MPa และสำหรับไม้ $(\sigma_{allow})_{w}$ = 21 MPa จงคำนวณหาค่าโมเมนต์ดัดที่สูงที่สุดของคานที่สามารถรับได้ E_{st} = 200 GPa, E_w = 12 GPa ค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่คานเหล็กเท่ากับ $I_z = 7.93 \times 10^6 mm^4$ และพื้นที่หน้าตัดเท่ากับ A = 5493.75 mm^2



รูปตัวอย่างที่ 6.2

วิธีทำ

กรณีไม่มีแผ่นไม้ (without board) เป็นการคำนวณเพื่อเปรียบเทียบกำลังรับแรงดัดกับกรณีเสริมกำลังที่มีแผ่นไม้ จะเห็นได้ว่าแกนสะเทินจะเป็นแกนเดียวกับแกน z ประยุกต์ใช้สมการการดัดโดยตรงกับคานเหล็กจึงได้ว่า

$$(\sigma_{allow})_{st} = \frac{Mc}{I_z}$$

$$168 N/mm^2 = \frac{M(105\,mm)}{7.93(10^6)\ mm^4}$$

$$M = 12.688\,kN\cdot m$$ ตอบ

กรณีมีแผ่นไม้ (with board) เนื่องจากในตอนนี้คานเป็นคานประกอบ เราจะต้องแปลงหน้าตัดให้เป็นวัสดุเดียวกันมันจะเป็นการง่ายกว่าที่จะแปลงไม้เป็นเหล็ก ในการทำเช่นนี้คือ $n = E_w/E_{st}$ เนื่องจากความกว้างเทียบเท่าของปริมาณของเหล็ก คือ

$$b_{st} = nb_w = \frac{12(10^3)\,MPa}{200(10^3)\,MPa}(300\,mm) = 18\,mm$$

หน้าตัดที่แปลงรูป แสดงในรูป พิจารณาระดับที่อ้างอิงที่จุดกึ่งกลางของหน้าตัดเหล็กแกนสะเทินมีค่าเท่ากับ

$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}A}{\sum A} = \frac{[0](5493.75\,mm^2)+[55\,mm](100\,mm)(18\,mm)}{5493.75\,mm^2+100(18\,mm^2)}$$

$$= 13.57\,mm$$

โมเมนต์ความเฉื่อยที่แกนสะเทินมีค่าเท่ากับ

$$
\begin{aligned}
I &= \left[7.93(10^6)\,\text{mm}^2 + (5493.75\,\text{mm}^2)(13.57\,\text{mm})^2\right] \\
&\quad + \left[\frac{1}{12}(18\,\text{mm})(100\,\text{mm})^3 + (18\,\text{mm})(100\,\text{mm})(55\,\text{mm} - 13.57\,\text{mm})^2\right] \\
&= 13.53(10^6)\,\text{mm}^4
\end{aligned}
$$

ค่าหน่วยแรงตั้งฉากปกติสูงสุดจะเกิดขึ้นในคานเหล็ก (หน้าตัดแปลง) ที่ส่วนล่างสุดของคานดังแสดงในรูป ดังนั้น โมเมนต์สูงสุดในแท่งเหล็กที่รับได้นั้นจะเป็น\

$$
\begin{aligned}
(\sigma_{allow}) &= \frac{Mc}{I} \\
168\,\text{N/mm}^2 &= \frac{M(118.57\,\text{mm})}{13.53(10^6)\,\text{mm}^4} \\
M &= 19.17\,\text{kN}\cdot\text{m}
\end{aligned}
$$

ค่าหน่วยแรงตั้งฉากปกติสูงสุดที่เกิดขึ้นในคานที่ส่วนของไม้ จะเกิดขึ้นที่ผิวบนดังแสดงในรูป เนื่องจาก

$$
c' = 105\,\text{mm} - 13.57\,\text{mm} = 91.43\,\text{mm}
$$

เนื่องจาก $\sigma_w = n\sigma_{st}$ ดังนั้น หน่วยแรงที่ยอมรับได้ของไม้ คือ

$$
\begin{aligned}
(\sigma_{allow})_w &= n\frac{M'c'}{I} \\
21\,\text{N/mm}^2 &= \left[\frac{12(10^3)\,\text{MPa}}{200(10^3)\,\text{MPa}}\right]\frac{M'(91.43\,\text{mm})}{13.53\times10^6\,\text{mm}^4} \\
M' &= 51.79\,\text{kN}\cdot\text{m}
\end{aligned}
$$

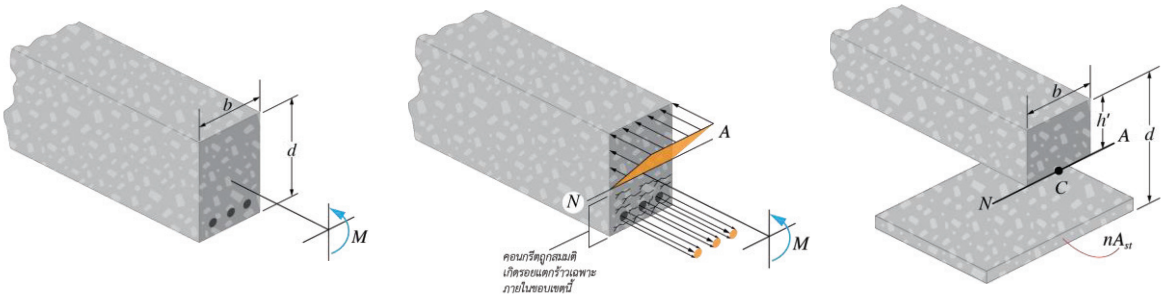
จากการเปรียบเทียบ ค่าโมเมนต์สูงสุดจะถูกจำกัดไว้โดยค่าหน่วยแรงที่ยอมรับได้ของเหล็ก ดังนั้น

$$
M = 19.17\,\text{kN}\cdot\text{m}
$$
ตอบ

สังเกตได้ว่าการใส่แผ่นไม้จะได้ค่าการรับโมเมนต์ดัดเพิ่มขึ้นร้อยละ 51 ของโมเมนต์เดิมของคานเหล็ก

6.3 คานคอนกรีตเสริมเหล็ก

คานทั้งหมดถูกกระทำด้วยหน่วยแรงดัด และคานต้องทำหน้าที่ต้านทานหน่วยแรงดึงและหน่วยแรงดัด คอนกรีตจะเกิดการแตกร้าวเมื่อคอนกรีตอยู่ในภาวะรับแรงดึง ดังนั้นคอนกรีตจะไม่เหมาะสมสำหรับต้านทานหน่วยแรงดึง เพื่อเอาชนะจุดด้อยนี้วิศวกรจะวางแนวเสริมเหล็กเสริมภายในคานคอนกรีตที่ตำแหน่งที่คอนกรีตอยู่ในภาวะรับแรงดึง ดังแสดงในรูปที่ 6-4(ก) เพื่อให้มีประสิทธิภาพมากขึ้นแท่งดังกล่าวนี้จะต้องอยู่ห่างจากแนวแกนสะเทินของคาน ดังนั้นโมเมนต์ดัดที่เกิดโดยแรงที่อยู่ในแท่งจะมีมากรอบแกนสะเทิน หรือพูดอีกนัยหนึ่งว่าว่าแท่งเหล็กเสริมจะมีระยะปกคลุมโดยคอนกรีตเพื่อป้องกันมิให้แท่งเหล็กเสริมเกิดการกัดกร่อนหรือสูญเสียกำลังเมื่อมีไฟไหม้ ในการออกแบบคอนกรีตเสริมเหล็กแท้จริง ความสามารถของคอนกรีตที่รองรับแรงดึงจะไม่ถูกนำมาคิด ดังนั้นการกระจายหน่วยแรงตั้งฉากปกติที่กระทำบนพื้นที่หน้าตัดของคานคอนกรีตเสริมเหล็กถูกสมมุติดังแสดงในรูปที่ 6-4(ข)



(ก) (ข) (ค)

รูปที่ 6-4 การแปลงหน้าตัดคอนกรีตเสริมเหล็ก

การวิเคราะห์หน่วยแรงจะทำที่ตำแหน่งของแกนสะเทินและการหาหน่วยแรงที่มากที่สุดในเหล็กและคอนกรีต เริ่มแรกพื้นที่ของเหล็ก A_s ต้องแปลงเป็นพื้นที่เทียบเท่าคอนกรีต โดยใช้แฟกเตอร์การแปลง $n = E_{sr} / E_{conc}$ อัตราส่วนนี้ ที่ให้ $n > 1$ ถูกเลือก เนื่องจากมีปริมาณคอนกรีตมากที่สุดที่แทนที่เหล็ก พื้นที่หน้าตัดแปลง คือ nA_{st} และภาคตัดแปลงดังแสดงในรูปที่ 6-4(ค) เมื่อ b แทนระยะจากส่วนบนของคานไปยังเหล็กที่แปลงแล้ว คือความกว้างของคาน และ h' เป็นระยะที่ยังไม่ทราบค่าวัดจากส่วนบนของคานไปยังแกนสะเทิน สามารถหา h' โดยใช้ความจริงที่ว่าจุดเซนทรอยด์ C ของพื้นที่หน้าตัดของภาคตัดแปลงวางอยู่บนแกนสะเทินดังแสดงในรูปที่ 6-4(ค) เมื่อเทียบกับแกนสะเทินดังนั้น โมเมนต์ของพื้นที่ทั้งสอง $\tilde{y} = \sum \bar{y}A / \sum A = 0$ จะมีค่าเป็นศูนย์ เนื่องจาก ดังนั้น

$$bh'\left(\frac{h'}{2}\right) - nA_{st}\left(d - h'\right) = 0$$

$$\frac{b}{2}h'^2 + nA_{st}h' - nA_{st}d = 0$$

เมื่อ h' ได้มาจากสมการกำลังสองนี้ จากคำตอบนี้ จะสามารถนำไปหาค่าหน่วยแรงในคานได้

ตัวอย่างที่ 6.3

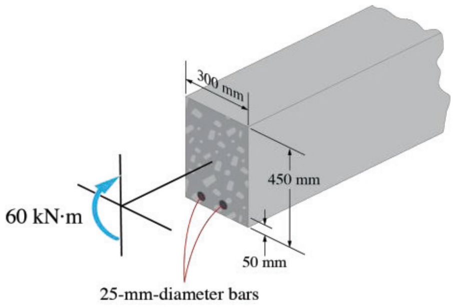
คานคอนกรีตเสริมเหล็กมีพื้นที่หน้าตัดแสดงในรูปตัวอย่างที่ 6.3(ก) ถ้าคานถูกกระทำด้วยโมเมนต์ดัด M = 60 kN.m จงคำนวณหาหน่วยแรงตั้งฉากปกติในแต่ละแท่งเหล็กเสริมและหน่วยแรงตั้งฉากปกติที่มากที่สุดในคอนกรีต กำหนด E_{st} = 200 GPa และ E_c = 25GPa

วิธีทำ

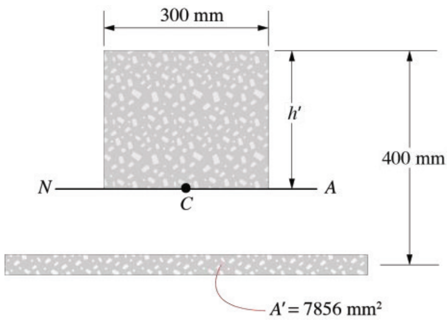
เนื่องจากคานทำจากคอนกรีตในขบวนการวิเคราะห์จะไม่คิดกำลังของคอนกรีตในการรับหน่วยแรงดึง

คุณสมบัติของภาคตัด (section properties) พื้นที่ทั้งหมดของเหล็ก $A_{st} = 2\left[\pi(12.5)^2\right] = 982\ \text{mm}^2$ แปลงเป็นพื้นที่คอนกรีตเทียบเท่าดังแสดงในรูปตัวอย่างที่ 6.3(ข) นั่นคือ

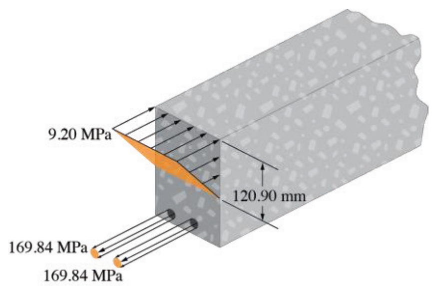
$$A' = nA_s = \frac{200(10^3)\text{MPa}}{25(10^3)\text{MPa}}\left(982\text{mm}^2\right) = 7856\ \text{mm}^2$$



(ก)



(ข)



(ค)

รูปตัวอย่างที่ 6.3

จะได้จุดเซนทรอยด์ที่อยู่บนแกนสะเทิน $\sum \tilde{y}A = 0$ หรือ

$$300\text{ mm}\left(h'\right)\frac{h'}{2} - 7{,}856\text{ mm}^2\left(400\text{ mm} - h'\right) = 0$$

$$h'^2 + 52.37h' - 20{,}949.33 = 0$$

แก้หาคำตอบที่เป็นค่าบวก $h' = 120.90$ mm

ใช้ค่านี้สำหรับ h' หาโมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่หน้าตัดแปลงรอบแกนสะเทินคือ

$$I = \left[\frac{1}{12}\left(300\text{ mm}\right)\left(120.90\text{ mm}\right)^3\right] + 300\text{ mm}\left(120.90\text{ mm}\right)\left(\frac{120.9\text{ mm}}{2}\right)^2$$

$$+ 7{,}856\text{ mm}^2\left(400\text{ mm} - 120.90\text{ mm}\right)^2\Big]$$

$$= 788.67 \times 10^6\ \text{mm}^4$$

หน่วยแรงตั้งฉากปกติ (normal stress) ประยุกต์ใช้สมการการดัดในหน้าตัดแปลงหน่วยแรงตั้งฉากปกติที่มากที่สุดในคอนกรีต คือ

$$\left(\sigma_{conc}\right)_{max} = \frac{60\text{ kN}\cdot\text{m}\left(1000\text{ mm/m}\right)\left(120.90\text{ mm}\right)\left(1000\text{ N/kN}\right)}{788.67 \times 10^4\ \text{mm}^4} = 9.20\text{MPa}$$

หน่วยแรงตั้งฉากปกติที่ต้านทานโดยคอนกรีตที่แทนด้วยเหล็ก คือ

$$\left(\sigma'_{conc}\right) = \frac{60\text{ kN}\cdot\text{m}\left(1000\text{ mm/m}\right)\left(1000\text{ N/kN}\right)\left(400\text{ mm} - 120.9\text{ mm}\right)}{788.67 \times 10^4\ \text{mm}^4} = 21.23\text{ MPa}$$

หน่วยแรงตั้งฉากปกติในแต่ละแท่งเหล็กเสริม คือ

$$\sigma_{st} = n\left(\sigma'_{conc}\right) = \left(\frac{200\left(10^3\right)\text{MPa}}{25\left(10^3\right)\text{MPa}}\right)\left(21.23\text{ MPa}\right) = 169.84\text{ MPa}$$

การกระจายของหน่วยแรงตั้งฉากปกติสามารถแสดงเชิงกราฟิกได้ดังแสดงในรูปตัวอย่างที่ 6.3(ค)

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 6

1) คานประกอบมีวัสดุ A ทำจากเหล็กยึดติดกับวัสดุ B ทำจากทองเหลืองดังรูป มีโมเมนต์กระทำ M = 6.5 kN.m จงหาค่าหน่วยแรงอัดสูงสุดที่เกิดขึ้นในวัสดุทั้งสองชนิด และหน่วยแรงดัดที่เกิดขึ้นที่จุดต่อของวัสดุสองชนิด กำหนดให้ E_{br} = 100 GPa และ E_{st} = 200 GPa

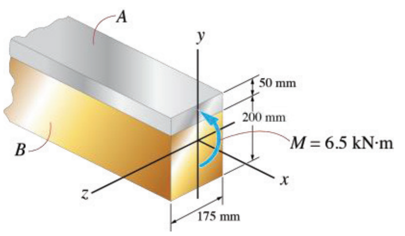
2) คานประกอบมีวัสดุ A ทำจากเหล็กยึดติดกับวัสดุ B ทำจากทองเหลืองดังรูป วัสดุทั้งสองมีหน่วยแรงดัดที่ยอมให้ $(\sigma_{allow})_{st}$ = 180 MPa และ $(\sigma_{allow})_{br}$ = 60 MPa จงหา M สูงสุด ที่กระทำกับคาน กำหนดให้ E_{br} = 100 GPa และ E_{st} = 200 GPa

3) คานไม้เสริมกำลังด้วยแผ่นเหล็กกล้าบริเวณด้านบนและด้านล่างของหน้าตัดดังรูป จงหาค่าหน่วยแรงดัดสูงสุดที่เกิดขึ้นที่ไม้และเหล็ก ถ้าคานนั้นมีโมเมนต์ดัด M = 5 kN.m และวาดรูปการกระจายหน่วยแรงดัดตลอดหน้าตัดของคาน เมื่อ E_w = 11 GPa และ E_{st} = 200 GPa

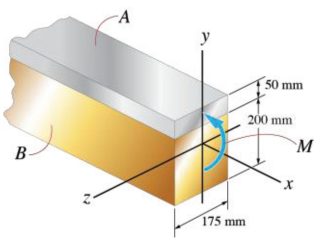
4) คานพลาสติกเสริมกำลังด้วยแผ่นอลูมิเนียมทั้งด้านบนและด้านล่างของหน้าตัดดังรูป จงหาค่าหน่วยแรงดัดสูงสุดที่เกิดขึ้นกับอลูมิเนียมและพลาสติก ถ้ามีโมเมนต์ดัดกระทำ M = 750 N.m, E_{al} = 70 GPa และ E_{pl} = 14 GPa

5) รางเหล็กที่ใช้ในการเสริมกำลังคานไม้ดังรูป มีโมเมนต์ดัดกระทำ M = 12500 N.m จงหาหน่วยแรงดัดสูงสุดที่เกิดขึ้นกับเหล็กและไม้ เมื่อ E_{st} = 290 GPa และ E_w = 16 GPa

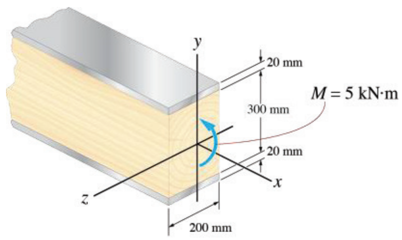
6) คานยื่นทำด้วยทองเหลืองหุ้มด้วยท่อเหล็ก มีโมเมนต์ดัดกระทำ 8 kN.m ที่ปลายคาน จงหาค่าหน่วยแรงดัดสูงสุดเมื่อ E_{br} = 100 GPa และ E_{st} = 200 GPa



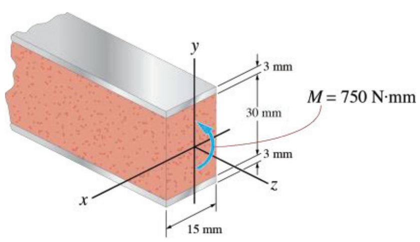
รูปแบบฝึกหัดข้อ 1)



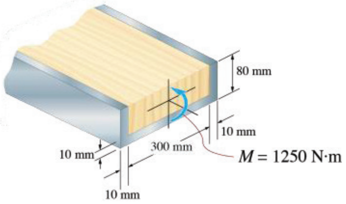
รูปแบบฝึกหัดข้อ 2)



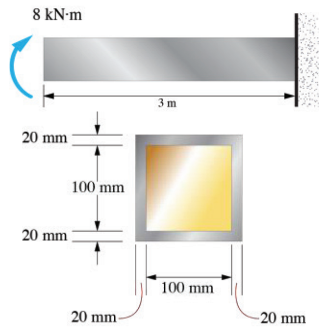
รูปแบบฝึกหัดข้อ 3)



รูปแบบฝึกหัดข้อ 4)



รูปแบบฝึกหัดข้อ 5)



รูปแบบฝึกหัดข้อ 6)

7) คานทำด้วยวัสดุ 3 ชนิดยึดติดกันเป็นชั้นๆ ดังรูป มีค่า E_{pvc} = 3.2 GPa, E_E = 1.1 GPa และ E_B = 5.6 GPa จงหาค่าหน่วยแรงดัดสูงสุดที่เกิดขึ้นที่วัสดุ PVC

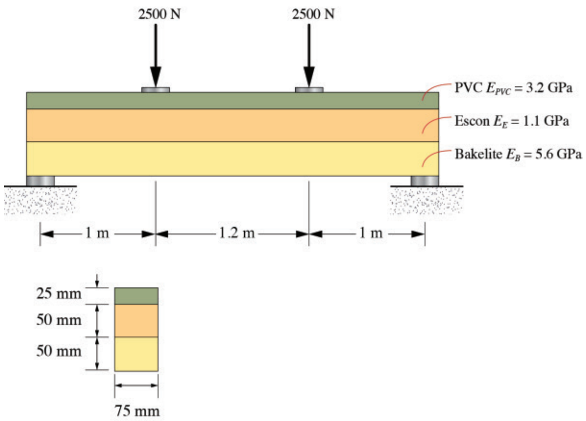
8) แผ่นบางส่วนบนทำจากอะลูมิเนียม 2014-T6 ถูกใช้เสริมคานพลาสติกเคปลาร์ 49 ถ้าหน่วยแรงดัดที่ยอมรับได้สำหรับอะลูมิเนียม $(\sigma_{allow})_{al}$ = 40 ksi และสำหรับเคปลาร์ $(\sigma_{allow})_k$ = 8 ksi จงคำนวณหาโมเมนต์ดัดที่มากที่สุด M ที่กระทำต่อคาน

9) คานประกอบขึ้นด้วยไม้และแผ่นเหล็กบาง A-36 ถ้าหน่วยแรงดัดที่ยอมรับได้สำหรับไม้ $(\sigma_{allow})_w$ = 20 MPa และสำหรับเหล็ก $(\sigma_{allow})_{st}$ = 130 MPa จงคำนวณหาโมเมนต์ดัดสูงสุด M ที่คานสามารถรับได้อย่างปลอดภัย

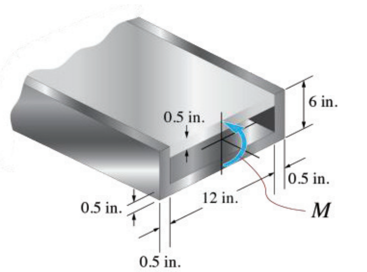
10) คานเหล็กดังแสดงในรูปทำด้วยเหล็กซึ่งมีค่า σ_Y = 250 MPa และ σ_U = 400 MPa กำหนดให้สัดส่วนความปลอดภัยมีค่าเท่ากับ 2.50 จงหาขนาดของโมเมนต์ที่มากที่สุด ที่สามารถกระทำบนคานเมื่อมีการดัดรอบแกน z

11) จงทำโจทย์ข้อที่ 10) โดยสมมุติว่าคานเหล็กมีการดัดรอบแกน y

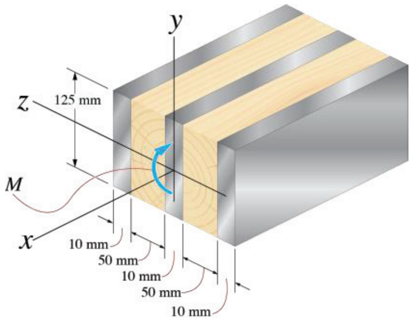
12) คานซึ่งมีหน้าตัดดังแสดงในรูปทำด้วยอะลูมิเนียมผสมซึ่งมีค่า σ_Y = 310 MPa และ σ_U = 480 MPa กำหนดให้สัดส่วนความปลอดภัยมีค่าเท่ากับ 3.00 จงหาขนาดของโมเมนต์ที่มากที่สุด ที่สามารถกระทำบนคานเมื่อมีการดัดรอบแกน z



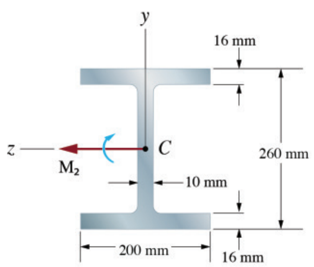
รูปแบบฝึกหัดข้อ 7)



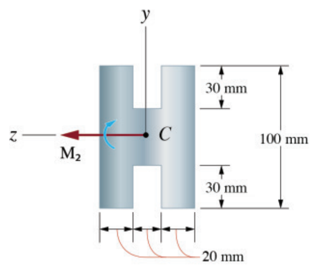
รูปแบบฝึกหัดข้อ 8)



รูปแบบฝึกหัดข้อ 9)



รูปแบบฝึกหัดข้อ 10)



รูปแบบฝึกหัดข้อ 12)

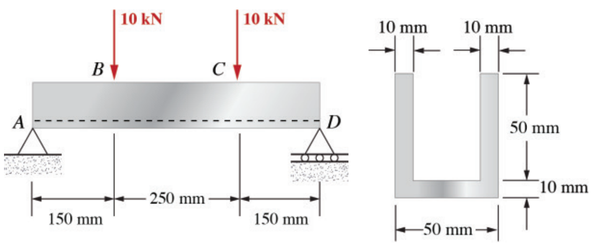
13) จงทำโจทย์ข้อ 12) โดยสมมุติว่าคานมีการดัดรอบแกน y

14) แรงในแนวดิ่ง 2 แรงกระทำบนคานซึ่งมีหน้าตัดดังแสดงในรูป จงหาค่าความเค้นดึงและความเค้นอัดสูงสุดในช่วง BC ของคาน

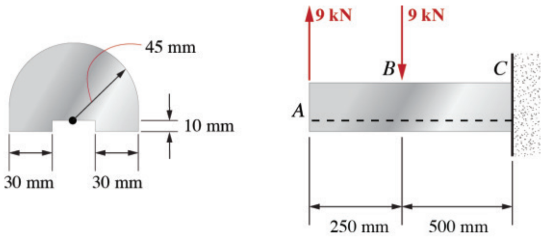
15) และ 16) แรงในแนวดิ่ง 2 แรงกระทำบนคานซึ่งมีหน้าตัดดังแสดงในรูป จงหาค่าความเค้นดึงและความเค้นอัดสูงสุดในช่วง BC ของคาน

17) จงทำโจทย์ข้อ 16) โดยสมมุติว่าเพิ่มความกว้างของปีกจาก 100 mm เป็น 125 mm

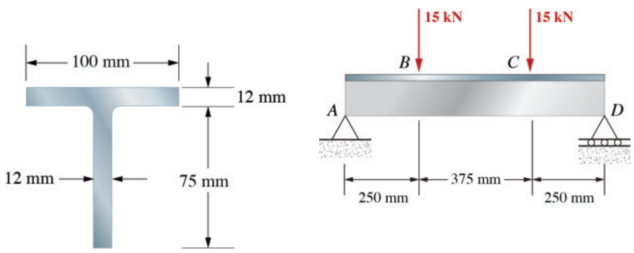
18) และ 19) กำหนดให้คานซึ่งมีหน้าตัดดังแสดงในรูปเกิดการดัดรอบแกนนอน และโมเมนต์ดัดมีค่าเท่ากับ 5.5 kN.m จงหาขนาดของแรงรวมที่มากระทำ (a) บนแผ่นปีกด้านบน (b) บนส่วนที่แรงเงาแผ่นเอว



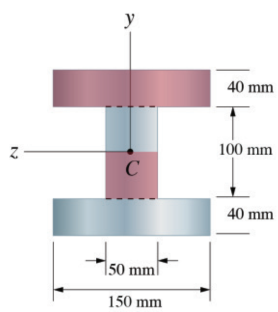
รูปแบบฝึกหัดข้อ 14)



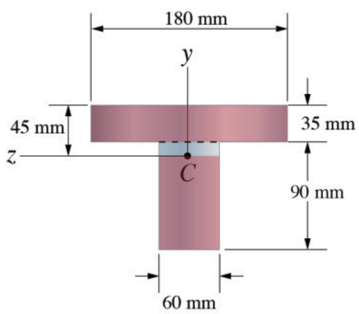
รูปแบบฝึกหัดข้อ 15)



รูปแบบฝึกหัดข้อ 16)



รูปแบบฝึกหัดข้อ 18)

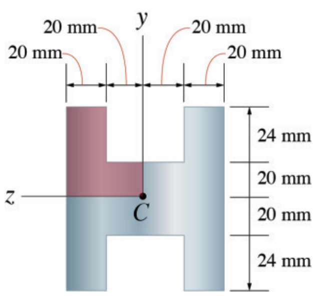


รูปแบบฝึกหัดข้อ 19)

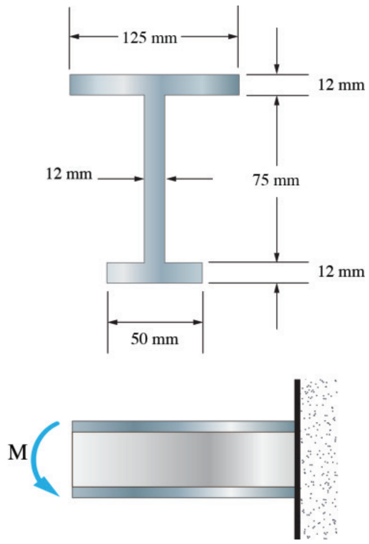
20) กำหนดให้คานซึ่งมีหน้าตัดดังแสดงในรูปเกิดการดัดรอบแกนนอน และโมเมนต์ดัดมีค่าเท่ากับ 4 kN.m จงหาขนาดของแรงรวมที่มากระทำบนส่วนที่แรงเงาในหน้าตัดคาน

21) จงทำโจทย์ข้อที่ 20) โดยสมมุติว่าคานมีการดัดรอบแกนดิ่งโดยโมเมนต์ขนาดเท่ากับ 4 kN.m

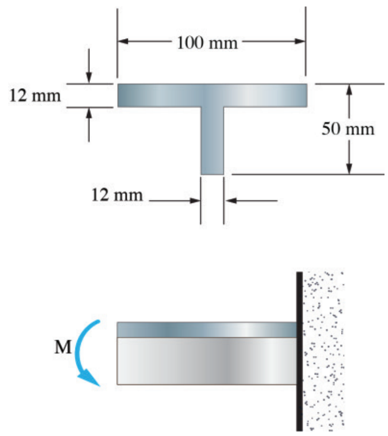
22) และ 23) สำหรับวัสดุหล่อดังแสดงในรูป จงหาขนาดของโมเมนต์ M ที่มากที่สุด ที่สามารถมากระทำโดยไม่ทำให้ความเค้นมีค่าเกิน σ_{all} = +40 MPa และ σ_{all} = -105 MPa



รูปแบบฝึกหัดข้อ 20)



รูปแบบฝึกหัดข้อ 22)



รูปแบบฝึกหัดข้อ 23)

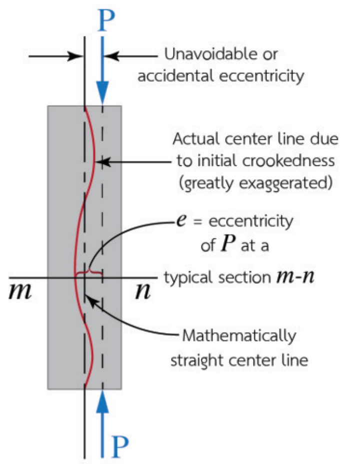
บทที่ 7
การโก่งของเสา

7.1 บทนำ

เสาเป็นชิ้นส่วนรับแรงอัดที่ลักษณะชิ้นยาวและชะลูด เมื่อให้ภาระเพิ่มขึ้นอย่างช้าๆ แล้วจะวิบัติโดยการโก่งเดาะ (buckling) ที่ภาระต่ำกว่าภาระที่จะวิบัติเนื่องจากการอัดอยู่มาก ในเรื่องนี้นั้น เสาจึงแตกต่างจากชิ้นส่วนรับแรงอัดที่สั้น ซึ่งแม้ว่าจะให้ภาระแบบเยื้องศูนย์ แต่จะไม่โก่งทางด้านข้าง แต่มักพิจารณาว่าชิ้นส่วนรับแรงอัดจะเป็นเสาเมื่อความยาวที่ไม่รองรับมากกว่าสิบเท่าของขนาดหน้าตัดด้านที่น้อยที่สุด

เสาจะถูกแบ่งประเภทออกเป็นสองกลุ่ม คือ เสาสั้นและเสายาวปานกลาง และในบางครั้งนั้นชิ้นส่วนรับแรงกดที่มีลักษณะสั้นมากก็มักถูกจัดอยู่ในกลุ่มที่สาม ความแตกต่างระหว่างกลุ่มทั้งสามจะกำหนดได้จากพฤติกรรม เสายาวจะวิบัติโดยการโก่งดัดหรือการดัดด้านข้างมากเกินไป เสายาวปานกลางจะวิบัติเนื่องจากการโก่งดัดกับการอัด ส่วนชิ้นส่วนรับแรงกดจะวิบัติจากแรงอัดเป็นหลัก ซึ่งจะพิจารณาความแตกต่างเหล่านี้อย่างละเอียดต่อไป

เสาในอุดมคติจะเป็นชิ้นส่วนเนื้อเดียวกันที่มีหน้าตัดคงที่ซึ่งเดิมเป็นเส้นตรงและรับภาระอัดตามแนวแกน อย่างไรก็ตามเสาที่แท้จริงจะมีความบกพร่องเนื่องจากวัสดุและการประกอบ รวมทั้งการกระทำของแรงแบบเยื้องศูนย์โดยความบังเอิญ ซึ่งทำให้เกิดผลที่ขยายแสดงไว้ในรูปที่ 7-1 การโก่งระยะแรกของเสากับการกระทำของภาระทำให้เกิดระยะเยื้องศูนย์ที่กำหนดไม่ได้ e ที่เทียบกับจุดศูนย์ถ่วงของหน้าตัดมาตรฐาน m-n ภาระบนหน้าตัดนี้จะคล้ายกับภาระบนเสาสั้น (short strut) ที่รับภาระเยื้องศูนย์ และความเค้นลัพธ์เกิดจากการประกอบความเค้นอัดและความเค้นแอ่นเข้าโดยตรง



รูปที่ 7-1 ปัจจัยที่มีผลต่อภาระเบนศูนย์ในเสา

ถ้าระยะเยื้องศูนย์มีค่าน้อยและชิ้นส่วนมีความยาวน้อยแล้ว การแอ่นทางด้านข้างจะไม่ต้องพิจารณาได้และไม่มีผลกระทบโครงสร้างอย่างเด่นชัดเมื่อเทียบกับความเค้นอัดโดยตรง แต่ชิ้นส่วนยาวนั้นมีความยืดหยุ่นมากเพราะว่าระยะโก่งไม่แปรผันตามกำลังสามของความยาว ดังนั้นค่าของ P ที่ค่อนข้างต่ำก็อาจจะทำให้เกิดความเค้นแอ่นที่สูงและตามด้วยความเค้นอัดตรงที่ไม่พิจารณาได้ ดังนั้นในภาวะขีดสุดนั้น เสาสั้นจะรับความเค้นอัดโดยตรงเป็นส่วนใหญ่ และเสายาวจะรับความเค้นแอ่นเป็นส่วนใหญ่ เมื่อความยาวของเสาเพิ่มขึ้นแล้ว ความเค้นอัดโดยตรงจะมีความสำคัญน้อยลง และความเค้นแอ่นจะมีความสำคัญมากขึ้น อย่างไรก็ตามในเสายาวปานกลางนั้นไม่จำเป็นต้องกำหนดอัตราการเปลี่ยนแปลงความเค้นเหล่านี้หรืออัตราส่วนของความเค้นแต่ละชนิดที่กลายเป็นความเค้นลัพธ์ ความไม่ชัดเจนเช่นนี้ทำให้มีสมการของเสายาวปานกลางหลายสมการ ซึ่งส่วนใหญ่จะได้อธิบายในหัวข้อที่ 7.5

ในหัวข้อนี้จะไม่กำหนดเกณฑ์การแบ่งแยกระหว่างเสายาวกับเสาปานกลาง ยกเว้นความจริงที่ว่าเสายาวมักรับความเค้นแอ่นเป็นส่วนใหญ่ และเสายาวปานกลางมีความเค้นโดยตรงกับความเค้นแอ่นร่วมกัน ความแตกต่างระหว่างเสาเหล่านี้ในรูปของความยาวที่แท้จริงจะได้อธิบายอย่างละเอียดเมื่อได้ศึกษาพฤติกรรมในเสายาวในหัวข้อต่อไป

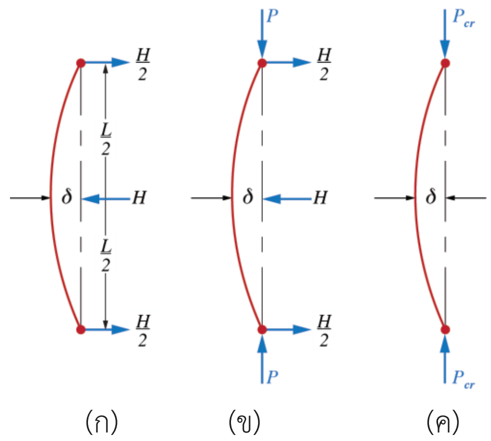
7.2 น้ำหนักบรรทุกวิกฤต

น้ำหนักบรรทุกวิกฤต (critical load) พิจารณาจากตัวอย่างดังนี้ เสายาวที่มีจุดหมุนที่ปลายถูกยึดไว้ในแนวดิ่ง เพื่อให้ดัดตัวได้อิสระในทุกทิศทางภาระราบที่กึ่งกลาง H จะกระทำเพื่อให้ดัดในระนาบที่อ่อนไหวที่สุดตามรูปที่ 7-1(ก) เนื่องจากความเค้นแอ่นเป็นสัดส่วนกับระยะโก่ง ดังนั้นความเค้นจะไม่เปลี่ยนแปลงถ้าภาระแนวแกน P กระทำที่แต่ละปลายตามรูปที่ 7-2(ข) ในเวลาเดียวกัน H จะลดลงเมื่อ P เพิ่มขึ้นเพื่อไม่ให้ระยะโก่งที่กึ่งกลาง δ เปลี่ยนแปลงไป ดังนั้นโมเมนต์ดัดที่กึ่งกลางเสาจะเป็น

$$M = \frac{H}{2}\left(\frac{L}{2}\right) + P\delta \tag{7-1}$$

$$M = (P_{cr})\delta \tag{7-2}$$

เมื่อ H ลดลงเป็นศูนย์ ในที่นี้จะเห็นจากรูปที่ 7-2(ค) ว่า P_{cr} เป็นภาระวิกฤตที่รักษาเสาไว้ในตำแหน่งที่โก่งโดยไม่มีแรงกดด้านข้าง การเพิ่มค่า P เหนือค่านี้จะเพิ่มระยะโก่ง δ และจึงเพิ่ม M แล้วก็ δ และอื่นๆ จนเสาวิบัติหรือหักงอ อีกประการหนึ่ง ถ้า P ลดลงเล็กน้อยใต้ค่าวิกฤตนี้แล้ว ระยะโก่งจะลดลงและเสาจะยืดตัดออกตรงๆ ดังนั้น ภาระวิกฤตจึงเป็นภาระสูงสุดในแนวแกนที่เสาจะรับได้และยังเป็นเส้นตรงแม้ว่าอยู่ในกรณีที่ไม่เสถียร คือแรงผลักเพียงเล็กน้อยทางด้านข้างจะทำให้เสาล้มได้ตามรูปที่ 7-2(ค)



รูปที่ 7-2 คานและเสาที่แอ่นเท่ากัน

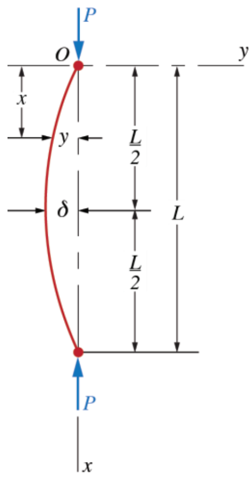
7.3 เสายาวที่ใช้สมการของออยเลอร์

การวิเคราะห์เสายาวทางทฤษฎีได้ดำเนินการโดยนักคณิตศาสตร์ชาวสวิตเซอร์แลนด์ ชื่อ ลีออนฮาร์ด ออยเลอร์ (Leonhard Euler) ในปี ค.ศ. 1757 ซึ่งได้ทำการวิเคราะห์ด้วยสมการอนุพันธ์ของเส้นโค้งยืดหยุ่น EI (d^2y/dx^2) = M และเรารู้ว่าการวิเคราะห์เช่นนั้นจะได้ผลเฉพาะเมื่อความเค้นไม่เกินขอบเขตแปรผัน ในสมัยของออยเลอร์นั้น ยังไม่มีแนวความคิดของความเค้นหรือความเค้นจำกัดที่ขอบเขตจำกัด ดังนั้นออยเลอร์จึงไม่เน้นแนวความคิดของขอบเขตบนของภาระวิกฤต P ขอบเขตบนเช่นนี้จะได้พิจารณาในหัวข้อที่ 7.4

รูปที่ 7-3 แสดงถึงเส้นกึ่งกลางของเสาที่อยู่ในภาวะสมดุลภายใต้ภาระวิกฤต P เราสมมุติว่าเสามีปลายเป็นจุดหมุน (มีลักษณะกลม มีหมุดหรือมีสลัก) ที่ถูกจำกัดไม่ให้เคลื่อนตัวทางด้านข้าง ระยะโก่งสูงสุด δ มีค่าน้อยมากจนไม่มีความแตกต่างมากระหว่างความยาวดั้งเดิมของเสากับระยะฉายในระนาบดิ่ง ภายใต้เงื่อนไขเช่นนี้นั้นความลาด dy/dx จะน้อยมากจนเราอาจจะใช้สมการอนุพันธ์ประมาณต่อเส้นโค้งยืดหยุ่นของคาน หรือ

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M = P(-y) = -Py \qquad (7\text{-}3)$$

เมื่อ M เป็นลบเพราะว่าในรูปที่ 7-3 นั้น ระยะโก่ง y เป็นลบ ถ้าเสาโก่งในทิศทางตรงกันข้ามจน y เป็นบวกแล้ว M ก็ยังเป็นลบเพราะโมเมนต์มีทิศทางไปทางลบ



รูปที่ 7-3 ลักษณะการแอ่นตัวของเสา

เราไม่สามารถจะอินทิเกรตสมการที่ 7-3 ได้โดยตรง เพราะว่า M ไม่ใช่ฟังก์ชั่นของ x อย่างไรก็ตาม เราใช้วิธีการแก้สมการนี้สองวิธี จากหลักการของวิชาพลศาสตร์แล้วจะเห็นว่าสมการที่ 7-3 คล้ายกับสมการการแกว่งอิสระ

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

ซึ่งคำตอบทั่วไปจะเป็น

$$x = C_1 \sin\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right) + C_2 \cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right)$$

ในทำนองเดียวกัน คำตอบของสมการที่ 7-3 จะเขียนได้เป็น

$$y = C_1 \sin\left(x\sqrt{\frac{P}{EI}}\right) + C_2 \cos\left(x\sqrt{\frac{P}{EI}}\right) \qquad (7\text{-}4)$$

เมื่อแทนค่า y = 0 เมื่อ x = 0 ลงในสมการ 7-4 แล้วจะได้ $C_2 = 0$ ถ้าเราใช้ y = 0 ที่ x = L แล้วก็จะได้

$$0 = C_1 \sin\left(L\sqrt{\frac{P}{EI}}\right)$$

ซึ่งค่านี้จะสมจริงเมื่อ $C_1 = 0$ (คือเสาไม่ถูกดัด) หรือเป็น

$$L\sqrt{\frac{P}{EI}} = n\pi \qquad (n = 0, 1, 2, 3, ...)$$

ซึ่งได้

$$P = n^2\frac{EI\pi^2}{L^2} \qquad (7\text{-}5)$$

วิธีแก้สมการอีกวิธีคือการใช้วิธีการอนุพันธ์ จะแก้สมการที่ 7-3 ได้โดยเขียนไว้ในรูป

$$EI\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = -Py$$

เมื่อคูณสมการนี้กับ 2dy เพื่อให้ได้อนุพันธ์ที่สมบูรณ์แล้ว เราจะอินทิเกรตได้

$$EI\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -Py^2 + C_1 \qquad (7\text{-}6)$$

เนื่องจาก ตามรูปที่ 7-3 นั้น $y=\delta$ เมื่อ dy/dx = 0 เมื่อแทนค่าลงในสมการที่ 7-6 แล้วจะได้ $C_1 = P\delta^2$ ดังนั้นสมการที่ 7-6 จะเป็น

$$EI\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -P(\delta^2 - y^2)$$

หรือ

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{P}{EI}}\sqrt{\delta^2 - y^2}$$

เมื่อแยกตัวแปรแล้ว เราจะได้ $\frac{dy}{\sqrt{\delta^2 - y^2}} = \sqrt{\frac{P}{EI}}\,dx$

ซึ่งเมื่ออินติเกรตแล้วก็จะได้ $\sin^{-1}\frac{y}{\delta} = x\sqrt{\frac{P}{EI}} + C_2$

ในการหาค่า C_2 นั้น เราจะใช้ความสัมพันธ์ y = 0 เมื่อ x = 0 ดังนั้น $C_2 = 0$ และ

$$\sin^{-1}\frac{y}{\delta} = x\sqrt{\frac{P}{EI}} \quad \text{or} \quad y = \delta\sin\left(x\sqrt{\frac{P}{EI}}\right) \qquad (7\text{-}7)$$

ซึ่งแสดงว่าเสามีรูปทรงแบบคลื่นไซน์ เมื่อให้ y = 0 ที่ x = L แล้วสมการที่ 7-7 จะเป็น

$$\sin\left(L\sqrt{\frac{P}{EI}}\right) = 0$$

หรือ

$$L\sqrt{\frac{P}{EI}} = n\pi \qquad (n = 0, 1, 2, 3, ...)$$

ซึ่ง

$$P = n^2\frac{EI\pi^2}{L^2} \qquad (7\text{-}8)$$

และค่านี้จะตรงกับค่าที่ได้มาจากสมการที่ 7-5 ที่ผ่านมา

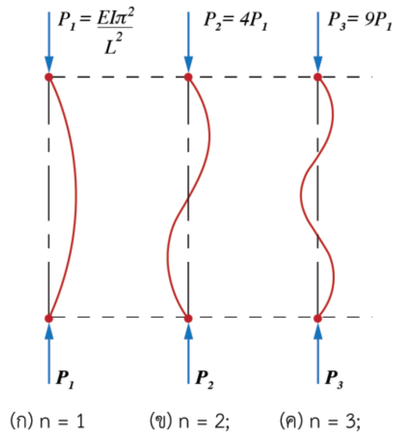
ค่า n = 0 จะไม่มีความหมายเพราะว่าภาระ P จะเป็นศูนย์ สำหรับ n ค่าอื่นๆ นั้น เสาจะเปลี่ยนรูปไปตามรูปที่ 7-4 ทั้งนี้ รูป(ก) จะมีความสำคัญมากที่สุด ค่าอื่นจะเกิดขึ้นเมื่อภาระสูงขึ้นและเมื่อยึดรั้งเสาที่จุดกึ่งกลางหรือระยะทุกหนึ่งในสาม ตามลำดับ[1] ภาระวิกฤตของเสาที่มีปลายเป็นจุดหมุนจึงเป็น

$$P = \frac{EI\pi^2}{L^2} \tag{7-9}$$

ภาระวิกฤตของเสาที่ปลายเป็นแบบอื่นนั้นจะแสดงได้ในรูปของภาระวิกฤตของเสาที่มีจุดหมุนซึ่งเป็นกรณีเบื้องต้น ดังนั้นจากความสมมาตรแล้ว เสาที่มีปลายติดแน่นตามรูปที่ 7-5(ก) มีจุดเปลี่ยนโค้งที่จุดหนึ่งในสี่ของความยาวที่ไม่ได้รองรับ เนื่องจากโมเมนต์ดัดเป็นศูนย์ที่จุดเปลี่ยนโค้ง แผนภูมิแรงจึงแสดงว่าระยะครึ่งหนึ่งของเสาที่ยึดปลายจะเท่ากับเสาที่ติดจุดหมุนและมีความยาวประสิทธิผล $L_e = L/2$ ถ้าแทนค่านี้ลงในสมการที่ 7-9 แล้ว ภาระวิกฤตของเสาที่ยึดปลายจะเป็น

$$P = \frac{EI\pi^2}{L_e^2} = \frac{EI\pi^2}{\left(\frac{L}{2}\right)^2} = 4\frac{EI\pi^2}{L^2} \tag{7-10}$$

ซึ่งมีกำลังเป็นสี่เท่าของเสาที่ปลายเป็นจุดหมุน



รูปที่ 7-4 ผลของ n ต่อภาระ

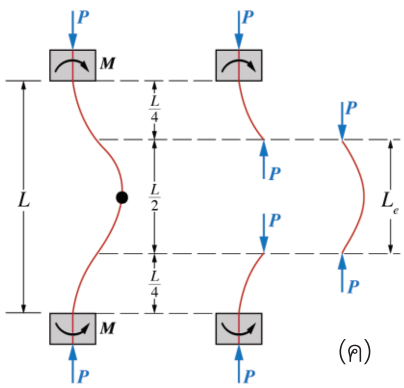
---

[1] เมื่อรูปที่ 7-4 ที่จุดกึ่งกลางแล้วจะให้รูปที่ 7-4 ที่มีความยาวเทียบเท่า 1/2L แทนค่า $\frac{1}{2}L$ ในค่า L ในสมการที่ 7-9 จะเพิ่มภาระวิกฤตขึ้น 4 เท่า ซึ่งตรงกับสมการที่ 7-8 เมื่อ n = 2

รูปที่ 7-5(ก) ยังให้วิธีหาภาระสูงสุดของเสาที่ฝังปลายด้านหนึ่งและปลายอีกด้านหนึ่งเป็นอิสระ คือเสาแบบเสาธง ภาระวิกฤต รูปที่ 7-5(ข) และที่เสาปลายยึด รูปที่ 7-5(ก) จะเท่ากันเมื่อเสายึดปลายยาวเป็นสี่เท่าของเสาแบบเสาธง หรืออาจกล่าวได้ว่า เมื่อความยาวสมดุล L_e ซึ่งเป็นสี่เท่าของความยาวจริงแทนที่ลงในสมการที่ 7-10 แล้ว ภาระวิกฤตที่เสาแบบเสาธงจะเป็น

$$P = \frac{4EI\pi^2}{L_e^2} = \frac{4EI\pi^2}{(4L)^2} = \frac{1}{4}\frac{EI\pi^2}{L^2} \tag{7-11}$$

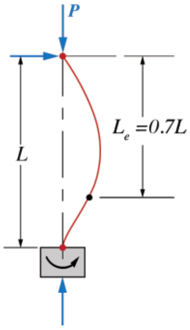
ซึ่งภาระนี้เป็นหนึ่งในสี่ของภาระวิกฤตของเสาที่มีจุดหมุนที่มีความยาวเท่ากัน



รูปที่ 7-5 พฤติกรรมเสาปลายยึดแน่นทั้งสองด้าน

เสาแบบอื่นๆ มีจุดหมุนที่ปลายด้านหนึ่งและยึดแน่นไว้ด้านหนึ่งดังรูปที่ 7-6 เสาเช่นนี้จะมีจุดเปลี่ยนโค้งที่ประมาณ 0.7L จากปลายที่ยึดแน่น เมื่อแทนค่าความยาวประสิทธิผล $L_e = 0.7L$ ลงในสมการที่ 7-9 แล้วก็จะได้

$$P = \frac{EI\pi^2}{L_e^2} = \frac{EI\pi^2}{(0.7L)^2} = 2\frac{EI\pi^2}{L^2} \quad \text{(โดยประมาณ)} \tag{7-12}$$



รูปที่ 7-6 เสาที่ติดหมุดที่ปลายด้านหนึ่งและฝังไว้ที่ปลายอีกด้านหนึ่ง

ผลของเงื่อนไขของปลายต่อภาระวิกฤตจึงแสดงได้ในรูปของภาระวิกฤตของเสามีจุดหมุนแบบพื้นฐานที่มีความยาวเท่ากัน สิ่งที่เราต้องการก็คือการใช้สมการที่ 7-9 คูณด้วยตัวคูณ N ซึ่งเปลี่ยนแปลงไปตามเงื่อนไขของปลายตามที่สรุปไว้ในตารางต่อไปนี้ หรืออาจจะแทนค่า L ในสมการที่ 7-9 ด้วยค่าในตารางของความยาวประสิทธิผลหรือความยาวแก้ไข L_e นั่นคือ

$$P = N\frac{EI\pi^2}{L^2} = \frac{EI\pi^2}{L_e^2}$$

ตารางที่ 7.1 ความยาวประสิทธิผลของเสา

เงื่อนไขของปลาย	N = **จำนวนเท่าของกำลังของเสาที่ปลายหมุน**	L_e = **ความยาวประสิทธิผล**
ยึดปลาย	4	1/2L
ยึดปลายหนึ่ง หมุนอีกปลายหนึ่ง	2	0.7L
หมุนทั้งสองปลาย	1	L
ยึดปลายหนึ่ง เป็นอิสระอีกปลายหนึ่ง	1/4	2L

7.4 ข้อจำกัดของสมการของออยเลอร์

โดยทั่วไปเสาจะโก่งดัดตามทิศทางที่อ่อนแอที่สุด ตามพฤติกรรมดังกล่าว เนื่องจากความต้านทานการโค้งตัวเปลี่ยนแปลงตามโมเมนต์ความเฉื่อย ค่าของ I ในสมการเสาจึงมักเป็นโมเมนต์ความเฉื่อยที่น้อยที่สุดของหน้าตัด ดังนั้น แนวโน้มของการโก่งดัดจึงเกิดขึ้นรอบแกนโมเมนต์ความเฉื่อยที่น้อยที่สุดของหน้าตัด

สมการของออยเลอร์ยังคงแสดงว่าภาระวิกฤตที่ทำให้โก่งดัดจะไม่ขึ้นอยู่กับกำลังของวัสดุ แต่ขึ้นอยู่กับขนาดและสัมประสิทธิ์ความยืดหยุ่นของเท่านั้น ดังนั้นเสาชะลูดที่คล้ายกันในสองมิติที่เสาหนึ่งเป็นเหล็กกำลังสูงและอีกเสาหนึ่งเป็นเหล็กโครงสร้างธรรมดาจะโก่งดัดภายใต้ภาระวิกฤตเดียวกัน แม้ว่ากำลังของเสาจะแตกต่างกัน แต่มีสัมประสิทธิ์ความยืดหยุ่นเหมือนกัน การออกแบบที่ดียังต้องให้มีหน้าตัดที่มีโมเมนต์ความเฉื่อยมากที่สุด ดังนั้น ในพื้นที่ที่กำหนดให้นั้น วัสดุควรกระจายออกจากจุดศูนย์ถ่วงให้มากที่สุดและให้โมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนหลักเท่ากันหรือเกือบเท่ากันมากที่สุด

ในการใช้สมการของออยเลอร์นั้น ความเค้นจากการดัดที่เกิดการโก่งดัดต้องไม่เกินขอบเขตจำกัด เราจะหาความเค้นนี้ได้จากการแทนค่าโมเมนต์ความเฉื่อยด้วย Ar^2 ที่มีค่าเท่ากัน เมื่อ A เป็นพื้นที่หน้าตัดและ r เป็นรัศมีที่น้อยที่สุดในการหมุน ซึ่งในกรณีพื้นฐานที่เสามีจุดยึดหมุนอิสระนั้น สมการที่ 7-9 จะเป็น

$$\frac{P}{A} = \frac{E\pi^2}{(L/r)^2} \qquad (7\text{-}13)$$

สำหรับเงื่อนไขปลายแบบอื่นๆ นั้น ให้แทนค่าความยาวที่เท่ากันของเสามีจุดยึดหมุนอิสระจากตารางในตอนที่แล้ว

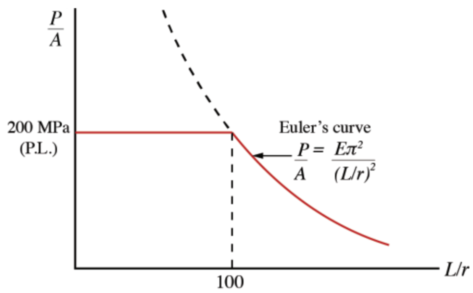
ในที่นี้ P/A เป็นความเค้นเฉลี่ยของเสาเมื่อมีภาระวิกฤต เรามักเรียกความเค้นนี้ว่า ความเค้นวิกฤต ค่าจำกัดคือความเค้นในของเขตจำกัด อัตราส่วน L/r นั้นจะเรียกว่า อัตราส่วนความชะลูดของเสา เนื่องจากเสาที่มีภาระในแนวแกนจะโก่งดัดรอบแกนที่มีโมเมนต์ความเฉื่อยน้อยที่สุด ดังนั้นรัศมีการหมุนจึงควรใช้เพื่อหาอัตราส่วนความเรียว

โดยทั่วไปแล้ว เรากำหนดเสายาวตามที่ใช้สมการของออยเลอร์ อัตราส่วนความเรียวจำกัดที่จำกัดขอบเขตล่างของสมการของออยเลอร์จะหาได้ง่ายจากการแทนสมการที่ 7-13 ด้วยค่าของขอบเขตจำกัดและสัมประสิทธิ์ความยืดหยุ่นของวัสดุที่กำหนดที่รู้ค่าอยู่แล้ว ขอบเขตแปรผันนี้จะเปลี่ยนไปตามวัสดุที่ต่างกัน และตามเกรดของวัสดุเดียวกันอีกด้วย[2]

ตัวอย่างเช่น เหล็กที่มีขอบเขตจำกัด 200 MPa และ E = 200 GPa นั้น อัตราส่วนความเรียวที่จำกัดจะเป็น

$$\left(\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{r}}\right)^2 = \frac{(200\times100)\pi^2}{200\times10^6} \approx 10000 \quad \text{or} \quad \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{r}} \approx 100$$

พิจารณาตามเส้นทึบในรูป 7-7 นั้น เมื่อค่าต่ำกว่านี้ตามเส้นประของเส้นโค้งของออยเลอร์หน่วยภาระออยเลอร์จะเกินขอบเขตแปรผัน ดังนั้น เมื่อ L/r < 100 แล้ว สมการของออยเลอร์จะใช้ไม่ได้และขอบเขตแปรผันจะเป็นความเค้นวิกฤต L/r > 100 เส้นโค้งยังคงแสดงว่าความเค้นวิกฤตหรือความเค้นที่ยินยอมได้ในเสาจะลดลงอย่างรวดเร็วตามอัตราส่วนความเรียวที่เพิ่มขึ้นตามสมการของออยเลอร์



รูปที่ 7-7 ตัวอย่างของเหล็กที่มีความเค้นวิกฤตหรือความเค้นที่ยินยอมได้

ในตอนสุดท้ายนั้น ให้สังเกตว่าสมการของออยเลอร์จะกำหนดภาระวิกฤต และไม่ใช่ภาระที่ใช้งาน จึงจำเป็นต้องหารด้านขวามือของสมการแต่ละตัวด้วยอัตราส่วนความปลอดภัยที่เหมาะสม ซึ่งมักเป็น 1.7 ถึง 2.5 โดยขึ้นอยู่กับวัสดุ เพื่อให้ได้ความเค้นที่ยอมได้ที่ใช้งานได้จริงๆ

[2] ในที่นี้เราใช้ r เพื่อแสดงรัศมีการหมุนเพื่อให้สอดคล้องกับสัญลักษณ์ AISC ต้องไม่สับสน r นี้กับ r ที่มี มักใช้เป็นรัศมีของวงกลม

ตัวอย่างที่ 7.1

จงเลือกวัสดุรูปทรง W ที่เบาที่สุด ซึ่งใช้เป็นเสาที่ยาว 7 เมตร เพื่อรับภาระในแนวแกน 450 kN และใช้สัมประสิทธิ์ความปลอดภัยเท่ากับ 3 โดยให้ (ก) ทั้งสองปลายมีหมุดหมุน และ (ข) ยึดปลายด้านหนึ่งและปลายอีกด้านหนึ่งมีหมุดหมุน โดยใช้ σ_{PL} = 200 MPa และ E = 200 GPa

วิธีทำ

(ก)

สำหรับเหล็กที่ขอบเขตแปรผันเป็น 200 MPa นั้น ตามหลักการของออยเลอร์สำหรับปลายที่มีหมุดหมุนต้องเป็น $L/r \geq 100$ ถ้า $L/r < 100$ แล้ว ความเค้นจำกัดจะเป็นขอบเขตจำกัด

ภาระที่กระทำนั้นเมื่อคูณกับอัตราส่วนความปลอดภัยแล้ว จะให้ภาระวิกฤตของออยเลอร์ 1350 kN เมื่อใช้สมการของออยเลอร์และแก้สมการหาค่า I แล้วเราจะได้

$$\left[P = \frac{EI\pi^2}{L^2}\right] \qquad I = \frac{PL^2}{E\pi^2} = \frac{(1350\times10^3)(7)^2}{(200\times10^9)(\pi^2)}$$

$$= 33.5\times10^{-6}\,\text{m}^4 = 33.5\times10^{6}\,\text{mm}^4$$

และเมื่ออัตราส่วนความเรียว $L/r > 100$ ซึ่งจะได้ r ที่น้อยที่สุดดังนี้

$$r \leq \frac{L}{100} = \frac{7000}{100} = 70.0\ \text{mm}$$

เกณฑ์เหล่านี้ทำให้หน้าตัดต้องมีอย่างน้อย $I > 33.5 \times 10^6\ \text{mm}^4$ และอย่างน้อย $r \leq 70.0$ มม. ซึ่งจะต้องเลือกเหล็ก W250 × 73 ที่ I น้อยที่สุดเป็น $I = 38.8 \times 10^6\ \text{mm}^4$ และ r น้อยที่สุดเป็น 64.7 มม.

ถ้าหน้าตัดขึ้นอยู่กับขอบเขตแปรผันแล้ว หน้าตัดจะต้องมีพื้นที่น้อยที่สุด 6750 มม.^{2} (ได้จากการหารภาระ 1350 kN ด้วยอัตราส่วนจำกัด 200 MPa) และ r น้อยที่สุดมากกว่า 70.0 มม. เงื่อนไขเหล่านี้จะตรงกับชิ้นส่วน W310 × 97 ที่ A = 12300 มม.^{2} และ r น้อยที่สุดเป็น 77.0 มม.

ดังนั้นหน้าตัดที่เบาที่สุดจึงเป็น W250 × 73

(ข)

ภาระวิกฤตของออยเลอร์เป็น 1350 kN ดังตัวอย่างข้างต้น เมื่อปลายด้านหนึ่งถูกยึด และอีกด้านหนึ่งมีหมุดหมุนแล้ว ความยาวประสิทธิผลของเสามีหมุดหมุนสมมูลย์จะเป็น 0.7L = 0.7(7) = 4.9 เมตร เมื่อใช้ความยาวประสิทธิผลนี้แทนความยาวที่แท้จริงแล้ว เราจะพบว่าเกณฑ์ของสมการของออยเลอร์จะเป็น

$$I^3 \geq \frac{PL^2}{E\pi^2} = \frac{(1350\times10^3)(4.9)^2}{(200\times10^9)\pi^2} = 16.4\times10^{-6}\ m^4$$

$$\geq 16.4\times10^6\ mm^4$$

และ

$$r \leq \frac{L}{100} = \frac{4900}{100} = 49.0\,mm$$

หน้าตัดที่เบาที่สุดที่สอดคล้องกับเงื่อนไขเหล่านี้ คือ W360 × 64 ที่ I น้อยที่สุดเป็น $18.8\times10^6\,mm^4$ และ r น้อยที่สุดเป็น 48.1 มม.

เกณฑ์อื่นๆ ตามขอบเขตแปรผันจะเป็น

$$A \geq \frac{1350\times10^3}{200\times10^6} = 6.75\times10^{-3}\ m^2 = 6750\,mm^2$$

ซึ่งหน้าตัดที่เบาที่สุดจะเป็น W250 × 58 และ A = 7420 mm^2 และ r = 50.33 มม. เมื่อเทียบเกณฑ์ทั้งสองชุดแล้ว เราจะพบว่าหน้าตัดที่เหมาะสมจะเป็น W250 × 58

เมื่อนักศึกษาพิจารณาไม่ละเอียดอาจจะพยายามเลือกหน้าตัดตามขนาดของ I โดยไม่ตรวจหา r และเลือกหน้าตัด W200 × 52 ที่ I น้อยที่สุดเป็น 17.8×10^4 แต่หน้าตัดที่มี r น้อยที่สุดเป็น 51.7 มม. และมีพื้นที่ 6660 มม.^{2} ซึ่งทำให้ความเค้นสูงกว่าขอบเขตแปรผัน 200 MPa ดังนั้นจึงใช้ไม่ได้ เพราะว่าเกินขอบเขตความเครียด-ความเค้นแปรผันที่ใช้กับสมการของออยเลอร์

ตัวอย่างนี้แสดงความสำคัญของอัตราส่วนความชะลูดของการวิเคราะห์เสา ในข้อ (ก) นั้น การเลือกจะควบคุมจากเสถียรภาพทางความยืดหยุ่น (คือ การใช้สมการของออยเลอร์) เมื่อในข้อ (ข) นั้นจะเลือกโดยการใช้ขอบเขตจำกัด

แบบฝึกหัดย่อย

1) ไม้ขนาด 50 มม. x 100 มม. ถูกใช้เป็นเสาที่ตรึงปลาย จงหาความยาวที่น้อยที่สุดซึ่งใช้สมการของออยเลอร์ได้ ถ้า E = 10 GPa และขอบเขตแปรผันเป็น 30 MPa จงหาภาระกลางเสาที่อัตราส่วนความปลอดภัย 2 เมื่อเสายาว 2.5 เมตร (ตอบ: L = 1.66 m; P = 32.9 kN)

2) เสาอะลูมิเนียมสั้น ยาว 6 ฟุต มีหน้าตัดเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด 3/4 นิ้ว x 2 นิ้ว และยึดสกรูที่ปลายแต่ละด้านเพื่อให้เป็นเสามีจุดหมุนตามแกนที่ตั้งฉากกับด้าน 2 นิ้ว และเป็นเสาตรึงปลายตามแกนที่ตั้งฉากกับด้าน 3/4 นิ้ว จงหาภาระกลางที่ปลอดภัยเมื่อใช้อัตราส่วนความปลอดภัย 2 และ $E = 10.3 \times 10^6$ psi (ตอบ: P = 2770 ปอนด์)

3) คานสี่เหลี่ยมจัตุรัส รองรับภาระ 20 kip ที่ความยาว 10 ฟุต สมมุติว่าปลายกลมแล้วจงหาความยาวของแต่ละด้าน ให้ใช้ $E = 29 \times 10^6$ psi (ตอบ: 1.86 นิ้ว)

4) จงแก้โจทย์ข้อ 3) เมื่อเสาทำจากไม้ที่ $E = 1.6 \times 10^6$ psi

5) เหล็กแชลแนล C310 × 45 ถูกยึดไว้เป็นตะแกรงเพื่อให้มีโมเมนต์ความเฉื่อยเท่ากันรอบแกนหลัก จงหาความยาวที่น้อยที่สุดของเสาที่มีหน้าตัดนี้ เมื่อปลายมีหมุดหมุน E = 200 GPa และขอบเขตแปรผันเป็น 240 MPa จงหาภาระที่ปลอดภัยที่เสายาว 12 เมตร จะรับได้เมื่ออัตราส่วนความปลอดภัยเป็น 2.5 (ตอบ: L = 989 เมตร P = 742 kN)

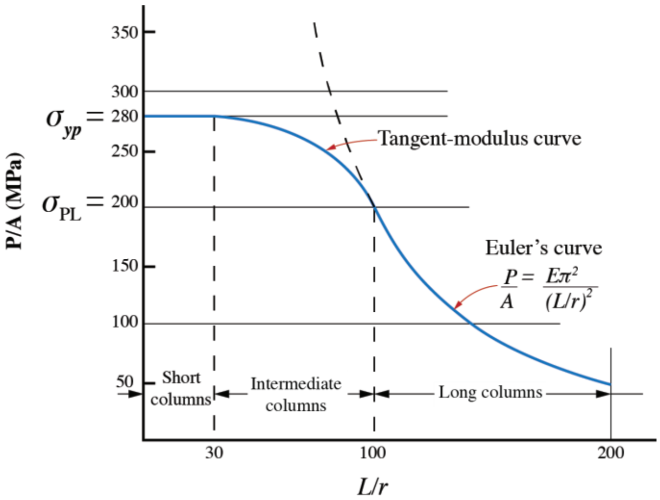
6) จงแก้โจทย์ข้อ 5) เมื่อปลายด้านหนึ่งถูกตรึงและปลายอีกด้านหนึ่งมีจุดหมุน

7) จงเลือกเหล็กรูป W ที่เบาที่สุดซึ่งเป็นเสายาว 8 ฟุต และมีปลายเป็นจุดหมุน มีภาระในแนวแกน 270 kN และอัตราส่วนความปลอดภัยเป็น 2.5 สมมุติให้ขอบเขตแปรผันเป็น 200 MPa และ E = 200 GPa (ตอบ: W250 × 67)

8) จงเลือกเหล็กรูป W ที่เบาที่สุด ซึ่งเป็นเสายาว 40 ฟุต และตรึงปลาย มีภาระในแนวแกน 150 ksi และอัตราส่วนความปลอดภัยเป็น 2 สมมุติให้ขอบเขตแปรผันเป็น 30 ksi $E = 29 \times 10^6$ psi จงหาเกณฑ์ที่ใช้กำหนดหน้าตัด

7.5 เสายาวปานกลาง-สูตรจากการทดลอง

ในหัวข้อที่ผ่านใช้สมการของออยเลอร์สามารถใช้ได้กับเสายาวได้เมื่ออัตราความชะลูดมากกว่าค่าที่ความเค้นเฉลี่ยมาถึงขอบเขตแปรผัน สำหรับเสาเหล็กที่จุดรองรับเป็นหมุดหมุนทั้งสองปลาย นั้นค่าจำกัดนี้ประมาณ L/r $\approx$100 ที่ 200 MPa สมการของออยเลอร์จะใช้ไม่ได้กับอัตราความชะลูดที่น้อย คำจำกัดความของเสาสั้นที่ความยาวไม่เกินสิบเท่าของขนาดด้านสั้นที่น้อยที่สุดจะเป็นข้อจำกัดบนของอัตราความชะลูดที่ประมาณ 30 สำหรับหน้าตัดสี่เหลี่ยมผืนผ้า ในทางปฏิบัตินั้นความเค้นจำกัดที่เสาสั้นจะเป็นความเค้นที่จุดคลาก (yield point) รูปที่ 7-8 แสดงถึงเงื่อนไขเหล่านี้สำหรับเหล็กที่มีจุดคลาก 280 MPa และขอบเขตแปรผันเป็น 200 MPa



รูปที่ 7-8 กราฟตัวอย่างของเสายาวปานกลาง

สำหรับวิเคราะห์เสายาวปานกลางได้มีการใช้วิธีการหลายวิธีเพื่อเชื่อมโยงระหว่างเสายาวกับเสาสั้น อย่างไรก็ตาม โดยทั่วไปแล้วจะใช้ไม่ได้กับเสายาวปานกลาง เหตุผลส่วนหนึ่งก็เนื่องจากการเริ่มจากความสัมพันธ์ของความเครียด-ความเค้นซึ่งจะเกินขอบเขตแปรผัน และเนื่องจากการประสมประสานที่ไม่ชัดเจนของความเค้นตามแนวแกนกับความเค้นดัด

สมการจากการทดลองส่วนใหญ่สำหรับเสายาวปานกลางได้พัฒนาขึ้นใช้กับเหล็กเพราะว่าเป็นวัสดุโครงสร้างที่แพร่หลาย ในตอนแรกเราจะพิจารณาเรื่องนี้แล้วแสดงการประยุกต์ใช้กับวัสดุโครงสร้างอื่นๆ ต่อไป

ในวิธีการหนึ่ง คือทฤษฎีสัมประสิทธิ์-เส้นสัมผัส เป็นการขยายสมการของออยเลอร์ไปยาวเสายาวปานกลางที่เกิดความเค้นเหนือขอบเขตแปรผันโดยการแทนที่สัมประสิทธิ์คงที่ E โดยสัมประสิทธิ์เส้นสัมผัส E_t กล่าวคือ

$$\frac{P}{A} = \frac{E_t \pi^2}{(L/r)^2} \qquad (7\text{-}14)$$

สัมประสิทธิ์เส้นสัมผัส E_t ยังเรียกว่าสัมประสิทธิ์ประสิทธิผล และได้จากการใช้ความลาดของเส้นสัมผัสต่อแผนภูมิความเครียด-ความเค้นที่จุดสมมุตินัยกับความเค้นเฉลี่ยในเสาเป็นค่า E_t ซึ่งทำให้ได้เส้นโค้งที่ต่อเส้นโค้งในรูปที่ 7-8 และแสดงสมการของเสายาวและเสาสั้น แม้ว่าสมการนี้จะได้จากการทดลองเพราะไม่ตรงกับการแปรผันของความเครียด-ความเค้นที่สมมุติในการหาสมการของออยเลอร์ แต่การทดสอบพบว่าจะสอดคล้องอย่างใกล้ชิดกับเส้นโค้งทางทฤษฎี[3]

วิธีการอื่นนั้นได้จากการทดลองอย่างแท้จริง สมการการออกแบบของวัสดุทางวิศวกรรม ต่างๆ จะได้จากคู่มือทางวิศวกรรมส่วนใหญ่ โดยทั่วไปแล้ว สมการจากการทดลองจะเป็นแบบเชิงเส้นหรือไร้เชิงเส้น (nonlinear) โดยขึ้นกับการสอดคล้องกับข้อมูลจากการทดสอบเสาจริงๆ การศึกษาเกี่ยวกับเสาในปัจจุบันซึ่งพิจารณาผลของความเค้นตกค้าง (residual stress) จะทำให้เข้าใจพฤติกรรมของเสายาวปานกลางได้อย่างสมบูรณ์ยิ่งขึ้น

สถาบันโครงสร้างเหล็กของสหรัฐ (American Institute of steel Construction : AISC) ได้กำหนดช่วงจำกัดระหว่างเสายาวปานกลางกับเสายาว ว่าเป็นค่าความเรียว C_c ที่คำนวณได้จาก

$$C_C = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_{yp}}}$$

เมื่อ E เป็นสัมประสิทธิ์ความยืดหยุ่น (200 GPa หรือ 29 × 10^6 สำหรับเหล็กเกรดส่วนใหญ่) และ σ_{yp} เป็นความเค้นคลากของเหล็กบางเกรดที่ใช้ สำหรับเสาที่มีความยาวประสิทธิผลเป็น L_e และรัศมีการหมุนน้อยที่สุดเป็น r นั้น AISC กำหนดว่าเมื่อ $L_e/r > C_c$ แล้วความเค้นที่ใช้งานจะเป็น

$$\sigma_w = \frac{12\pi^2 E}{23(L_e/r)^2} \tag{7-15}$$

(ให้สังเกตว่านี่เป็นสมการของออยเลอร์ที่อัตราส่วนความปลอดภัยเป็น 23/12 = 1.92) เมื่อ $L_e/r < C_c$ แล้ว AISC กำหนดสมการพาราโบล่า

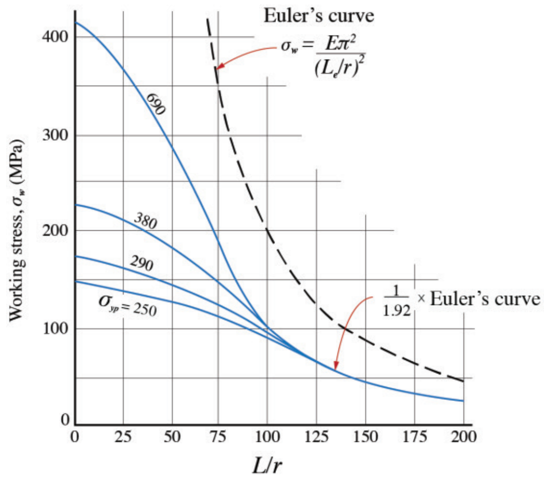
$$\sigma_w = \left[1 - \frac{(L_e/r)^2}{2C_c^2}\right]\frac{\sigma_{yp}}{FS} \tag{7-16}$$

เมื่ออัตราส่วนความปลอดภัย FS จะได้จาก

$$FS = \frac{5}{3} + \frac{3(L_e/r)}{8C_c} - \frac{(L_e/r)^3}{8C_c^3} \tag{7-17}$$

[3]ดูคำอธิบายเรื่องวิธีสัมประสิทธิ์เส้นสัมผัสจาก F.R.Shanley, strength of Materials, McCraw-Hill, New York, 1957, หน้า 582-588

ให้สังเกตว่าอัตราส่วนความปลอดภัยเป็น 1.92 ที่ $L_e/r = C_c$ และมีค่าน้อยลงเมื่ออัตราส่วนความยาวชะลูดมากขึ้น ค่าของ σ_w ที่เปลี่ยนแปลงตาม L_e/r ของเหล็กหลายเกรดที่ใช้หน่วย SI นั้นแสดงไว้แล้วในรูปที่ 7-9



รูปที่ 7-9 ความเค้นใช้งานของเสา (ข้อกำหนดของ AISC) สำหรับเหล็กเกรดต่าง ๆ

เมื่อพิจารณาสมการของเสาสำหรับวัสดุที่ไม่ใช่เหล็ก อุตสาหกรรมอะลูมิเนียมได้รวบรวมข้อกำหนดของเสาสำหรับอะลูมิเนียมผสมแบบต่างๆ ในข้อกำหนดเหล่านี้นั้น ความเค้นที่ยินยอมได้จะคงที่สำหรับเสาสั้น และค่าประมาณสมการสัมประสิทธิ์เส้นสัมผัสจากความสัมพันธ์แบบเส้นตรงจะใช้กับเสายาวปานกลาง ส่วนสมการออยเลอร์จะใช้กับเสายาว ตัวอย่างเช่น ข้อกำหนดสำหรับอะลูมิเนียมผสม 2014-T6 จะเป็น[4]

หน่วยอังกฤษ/สหรัฐ **หน่วย** SI

$\sigma_w = 28 \text{ ksi} \qquad \frac{L}{r} \le 12 \qquad \sigma_w = 193 \text{ MPa}$ (7-18)

$\sigma_w = 30.7 - 0.23\frac{L}{r} \text{ ksi} \qquad 12 < \frac{L}{r} < 55 \qquad \sigma_w = 212 - 1.59\frac{L}{r} \text{ MPa}$ (7-19)

$\sigma_w = \frac{54000}{(L/r)^2} \text{ ksi} \qquad \frac{L}{r} \ge 55 \qquad \sigma_w = \frac{372\times10^3}{(L/r)^2} \text{ MPa}$ (7-20)

[4]ค่าที่แสดงเป็นหน่วยสหรัฐนั้นได้จาก Specification for aluminum Structures, 4^{th} ed., Aluminium Construction Manual, Sec.1, Aluminium Association, Inc', Washington, D.C., April 1982, p.21 ค่าตามหน่วย SI นั้นเป็นค่าแปลงโดยประมาณ

ความยาวของเสาในข้อกำหนดจะถูกแสดงเป็น “ความยาวของชิ้นส่วนอัดระหว่างจุดรองรับด้านข้างหรือเป็นสองเท่าของความยาวของเสายื่น (ยกเว้นเมื่อการวิเคราะห์แสดงว่าจะใช้ความยาวน้อยกว่า)”

สำหรับเสาไม้นั้น สมาคมผู้ผลิตไม้แห่งชาติ[5] ได้เสนอสมการของออยเลอร์ในรูปดังต่อไปนี้

$$\sigma_w = \frac{\pi^2 E}{2.727(L/r)^2} = \frac{3.619E}{(L/r)^2} \qquad (7\text{-}21)$$

ทั้งนี้จะต้องปรับแต่งตามระยะเวลาให้ภาระและอัตราความชื้นของไม้ สำหรับเสาสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีขนาดด้านข้างน้อยที่สุด d, r = $\sqrt{d/12}$ แล้ว สมการที่ 7-21 จะลดรูปเป็น

$$\sigma_w = \frac{0.3E}{(L/d)^2} \qquad (7\text{-}22)$$

นอกจากสมการของเสาที่เสนอมาแล้ว มีการใช้สมการจากการทดลองอีกหลายรายการ สมการเหล่านี้ต่างมีจุดเด่นร่วมกันอยู่อย่างหนึ่ง คือจะลดภาระใช้งานที่ปลอดภัยเมื่ออัตราความเรียวเพิ่มขึ้น แม้ว่าจะมีสัดส่วนที่เปลี่ยนแปลงไป เนื่องจากมาตรฐานการออกแบบมีอยู่มาก เสาแบบเดียวกันจึงอาจรองรับภาระปลอดภัยที่ถูกกฎหมายอยู่หลายรายการ

<u>ตัวอย่างที่ 7.2</u>

จงใช้ข้อกำหนดของ AISC สำหรับเสาเพื่อหาภาระแนวแกนที่ปลอดภัยของหน้าตัด W360 × 122 ที่ใช้เป็นเสาภายใต้เงื่อนไขดังต่อไปนี้ (ก) มีจุดหมุนที่ปลายและมีความยาว 9 เมตร (ข) มีปลายตรึงและความยาวที่ไม่รองรับ 10 เมตร (ค) มีปลายตรึงและยาว 10 เมตร รองรับที่กึ่งกลาง ความยาว โดยใช้ σ_{yp} = 380 MPa และ E = 200 GPa

<u>วิธีทำ</u>

จากตารางเหล็ก W จะใช้พื้นที่ A = 15500 ตร.มม. และ r น้อยที่สุด 63.0 มม. สำหรับหน้าตัด W360 × 122

(ก)

สำหรับ σ_{yp} = 380 MPa นั้น อัตราความเรียวจำกัดจะเป็น

$$\left[C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_{yp}}}\right] \qquad C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2(200\times10^9)}{380\times10^6}} = 102$$

[5] National Design Specifications, National Lumber Manufacturers Association, Washington, D.C., 1962

ในที่นี้ อัตราความเรียวเป็น L_e/r = 9000/63.0 = 143 ซึ่งสูงกว่า C_c ดังนั้น ความเค้นใช้งานจะเป็น

$$\left[\sigma_w = \frac{12\pi^2 E}{23\left(\frac{L_e}{r}\right)^2}\right] \qquad \sigma_w = \frac{12\pi^2(200\times10^9)}{23(143)^2} = 50.4\ \text{MPa}$$

และภาระที่ปลอดภัยในแนวแกนจะเป็น

$$[P = \sigma A] \qquad P = \left(50.4\times10^6\right)\left(15500\times10^{-6}\right) = 781\ \text{kN}$$ ตอบ

(ข)

เมื่อใช้แนวความคิดของความยาวประสิทธิผลแล้ว เราพบว่าเสาที่ตรึงหรือยึดปลายเทียบเท่ากับเสามีหมุดหมุนที่ความยาวที่แท้จริงเป็นครึ่งหนึ่ง ดังนั้น เมื่อ L_e = 0.5L = 0.5(10) = 5 เมตร แล้ว อัตราความเรียวจะเป็น L_e/r = 5000/63.0 = 79.4 ซึ่งน้อยกว่า C_c = 102 และจะกำหนดความเค้นใช้งานได้ดังนี้

$$\left[FS = \frac{5}{3} + \frac{3(L_e/r)}{8C_c} - \frac{(L_e/r)^3}{8C_c^3}\right] \qquad FS = \frac{5}{3} + \frac{3(79.4)}{8(102)} - \frac{(79.4)^3}{8(102)^3} = 1.90$$

ซึ่ง

$$\left[\sigma_w = \frac{[1-(L_e/r)^2/2C_c^2]\sigma_{yp}}{FS}\right]$$

$$\sigma_w = \frac{\left\{1\text{-}[(79.4)^2/2(102)^2]\right\}}{1.90}(380\times10^6) = 139\ \text{MPa}$$

ในตอนสุดท้าย ภาระที่ปลอดภัยในแนวแกนจะเป็น

$$[P = \sigma A] \qquad P = \left(139\times10^6\right)\left(15500\times10^{-6}\right)$$

$$= 2150\ \text{kN}$$ ตอบ

(ค)

เมื่อยึดที่จุดกึ่งกลางแล้ว เสาจะเทียบเท่ากับเสาที่ยาว 5 เมตร และยึดที่ปลายด้านหนึ่งและมีหมุดหมุนที่ปลายอีกด้านหนึ่ง ความยาวประสิทธิผลจะเป็น L_e = 0.7L = 0.7(5) = 3.5 เมตร ดังนั้น L_e/r = 3500/63.0 = 55.6 ซึ่งน้อยกว่า C_c = 102 เมื่อใช้วิธีการตามข้อ (ข) แล้ว เราจะได้ FS = 1.85 และ σ_w = 175 MPa ดังนั้นภาระที่ปลอดภัยในแนวแกนจะเป็น

$$[P = \sigma A] \qquad P = \left(175\times10^6\right)\left(15500\times10^{-6}\right)$$

$$= 2710\ \text{kN}$$ ตอบ

ข้อแนะนำสำหรับโจทย์ข้อนี้คือการเพิ่มกำลังรับได้ของเสาที่ปลายมีความแกร่งอย่างสมบูรณ์ในข้อ (ข) มีค่าสูงกว่า ข้อ (ก) ซึ่งในความเป็นจริงแล้วเงื่อนไขนี้เป็นสิ่งที่ทำได้ยากในทางปฏิบัติเนื่องจากเสาที่ยึดปลายนั้น ที่จุดยึดจะต้องแข็งแกร่งมากและไม่ยอมให้มีการเคลื่อนที่ที่จุดยึดได้เลย การกำหนดภาระที่ยินยอมได้จึงต้องสมมุติให้ปลายมีหมุดหมุน หรือจะเป็นจริงมากขึ้นถ้าเลือกความยาวประสิทธิผลซึ่งปลายตรึงที่ประมาณ 0.75L แทนที่จะเป็น 0.5L ซึ่งขึ้นอยู่กับดุลพินิจของผู้ออกแบบ

ตัวอย่างที่ 7.3

จงเลือกเหล็กรูปทรง W ที่เบาที่สุดที่รองรับภาระในแนวแกน 90 kips และมีความยาวประสิทธิผล 15 ฟุต จงใช้ข้อกำหนดของ AISC สำหรับเสา เมื่อ $\sigma_{yp} = 36$ ksi และ E = 29×10^6 psi

วิธีทำ

เนื่องจากเราไม่รู้ทั้งพื้นที่ A และรัศมีการหมุนที่น้อยที่สุด r และไม่สามารถสร้างความสัมพันธ์ที่สะดวกขึ้นมาได้ ดังนั้นการเลือกชิ้นส่วน W ที่เบาที่สุดจึงเป็นขั้นตอนลองผิดลองถูก โดยมีลำดับขั้นดังนี้ (1) สมมุติความเค้นใช้งาน (2) คำนวณพื้นที่ที่ต้องการ (3) เลือกหน้าตัดเบาที่เหมาะสมตามพื้นที่ที่ต้องการ และ (4) คำนวณภาระที่ยินยอมได้ของหน้าตัดที่เลือกตามข้อกำหนดของเสา ถ้าภาระที่ยินยอมได้เท่ากับภาระที่กระทำ (หรือมากกว่าเล็กน้อย) แล้ว หน้าตัดที่เลือกจะมีความเหมาะสม แต่ถ้าภาระที่ยินยอมน้อยกว่าภาระที่กระทำแล้ว จะต้องเลือกหน้าตัดที่หนักขึ้นและใช้ขั้นตอนเดียวกัน เป็นที่ชัดเจนว่าเราต้องลองผิดลองถูกกันหลายครั้งก่อนจะได้หน้าตัดที่ถูกต้อง โดยขึ้นกับความเค้นเริ่มแรกว่าใกล้เคียงกับความเค้นที่แท้จริงหรือไม่ คำแนะนำประการหนึ่งคือสมมุติให้ภาระใช้งานเริ่มแรกเป็น 80% ของความเค้นที่ L/r = 0 ซึ่งได้จากข้อ กำหนดของเสา

สำหรับเสาที่ $\sigma_{yp} = 36$ ksi นั้น อัตราความเรียวที่จำกัดจะเป็น

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_{yp}}} = \sqrt{\frac{2\pi^2(29\times10^6)}{36\times10^3}} = 126$$

ทดลองคำนวณครั้งแรก: ที่ $L_e/r = 0$, $FS = \dfrac{5}{3}$ และ $\sigma_W = \sigma_{yp}/FS = 36/\dfrac{5}{3} = 21.6\text{ ksi}$
สมมุติให้ความเค้นเริ่มแรกเป็น $0.80(21.6) = 17.3\text{ ksi}$ พื้นที่ที่ต้องการจะเป็น

$$A = \frac{P}{\sigma} = \frac{90\times10^3}{17.3\times10^3} = 5.20\text{ in.}^2$$

ดังนั้น จากตารางหน้าตัดเหล็ก WF เราเลือก W8 × 21 ที่มีพื้นที่ A = 6.16 ตร.นิ้ว และ r = 1.26 นิ้ว ซึ่งน้อยที่สุด ในหน้าตัดนี้นั้น อัตราความเรียวจะเป็น L_e/r = 15(12)/1.26 = 143 ซึ่งสูงกว่า C_c = 126 ดังนั้น ความเค้นใช้งานของหน้าตัดนี้จะเป็น

$$\left[\sigma_w = \frac{12\pi^2 E}{23(L_e/r)^2}\right] \qquad \sigma_w = \frac{12\pi^2(29\times10^6)}{23(143)^2} = 7.30 \text{ ksi}$$

และภาระที่ยินยอมได้จะเป็น P = σA = (7.30)(6.16) = 45.0 kip เนื่องจากค่านี้น้อยกว่าภาระที่กระทำ 90 kips หน้าตัดจึงไม่พอ

ทดลองคำนวณครั้งที่สอง: ต่อมา เราเลือก W8 x 28 ซึ่งมีพื้นที่มากกว่าและมีค่า r ที่น้อยที่สุดมากขึ้น สำหรับหน้าตัดนี้นั้น A = 8.25 ตร.นิ้ว และ r ที่น้อยที่สุดเป็น 1.62 นิ้ว อัตราความเรียวเป็น Le/r = 15(12)/1.62 ซึ่งน้อยกว่า C_c = 126 ความเค้นใช้งานของหน้าตัดนี้จะได้จาก

$$\left[FS = \frac{5}{3} + \frac{3(L_e/r)}{8C_c} - \frac{(L_e/r)^3}{8C_c^3}\right] \quad FS = \frac{5}{3} + \frac{3(111)}{8(126)} - \frac{(111)^3}{8(126)^3} = 1.91$$

ซึ่งจะได้

$$\left[\sigma_w = \frac{[1-(L_e/r)^2/2C_c^2]\sigma_{yp}}{FS}\right] = 11.53 \text{ ksi}$$

ดังนั้น ภาระที่ยินยอมได้ของหน้าตัดนี้จะเป็น

$$P = \sigma A = (11.53)(8.25) = 95.1 \text{ kips}$$

เนื่องจากภาระนี้สูงกว่าภาระที่กระทำ 90 kips อยู่เล็กน้อย ดังนั้นหน้าตัด W8 x 28 จึงเป็นหน้าตัดที่เหมาะสม

ขั้นตอนการเลือกหน้าตัดจะง่ายขึ้นเมื่อใช้ตารางที่ให้ภาระแนวแกนที่ยินยอมได้สำหรับหน้าตัดต่างๆ ที่ความยาวต่างๆ เราจะได้ตารางเช่นนั้นจากคู่มือเหล็กเช่นที่พิมพ์โดย AISC อย่างไรก็ตามโจทย์ข้อนี้แสดงวิธีการลองผิดลองถูกที่มักจะเกิดในการออกแบบโครงสร้าง

แบบฝึกหัดย่อย

1) จงหาอัตราส่วนความเรียวของเสายาว 5 เมตร ที่ตรึงปลาย ถ้าหน้าตัดเป็น (ก) วงกลมที่มีรัศมี 40 มม. และ (ข) จัตุรัสขนาด 50 มม. จงใช้วิธีความยาวประสิทธิผล (ตอบ: (ก) 125; (ข) 173)

2) จงหาอัตราส่วนความเรียวของเสายาว 12 ฟุต ที่ตรึงปลายด้านหนึ่งและมีหมุดหมุนที่ปลายอีกด้านหนึ่ง ถ้าหน้าตัดเป็น (ก) วงกลมที่มีรัศมี 2 นิ้ว และ (ข) จัตุรัสขนาด 2.5 นิ้ว

3) จงหาความยาวสูงสุดของหน้าตัด W250 x 167 ที่ใช้เป็นเสาปลายมีหมุดหมุนเพื่อรับภาระ 1600 kN จงใช้ข้อกำหนด AISC ที่ σ_{yp} = 380 MPa และ E = 200 GPa

4) หน้าตัด W14 x 82 ถูกใช้เป็นเสาที่มีความยาวประสิทธิผลเป็น 30 ฟุต จงใช้ข้อกำหนดของ AISC เพื่อหาภาระสูงสุดที่ใช้ได้อย่างปลอดภัย โดยให้ σ_{yp} = 50 ksi และ E = 29 x 10^6 psi

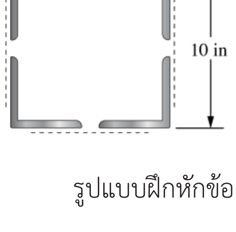
5) หน้าตัด W310 x 52 ถูกใช้เป็นเสาที่มีปลายเป็นจุดหมุน จงใช้ข้อกำหนด AISC เพื่อหาภาระสูงสุดที่ใช้ได้ เมื่อ (ก) L = 10 เมตร (ข) L = 14 เมตร โดยใช้ σ_{yp} = 250 MPa และ E = 200 GPa

6) เหล็กฉาก 4 x 4 x 1/2 นิ้ว สี่เส้นถูกยึดไว้ด้วยกันเพื่อทำเป็นหน้าตัดเสาตามรูป จงใช้สเปค AISC เพื่อหาความยาวสูงสุดที่จะใช้ภาระ 200 kip ได้อย่างปลอดภัย จงหาระยะระหว่างคานขวาง ถ้าอัตราส่วนความเรียวของเหล็กฉากแต่ละเส้นไม่เกินสามในสี่ของหน้าตัดที่ประกอบ ให้ใช้ σ_{yp} = 60 ksi และ E = 29 x 10^6

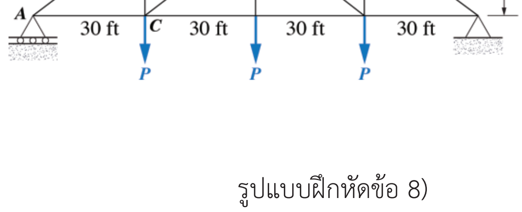
7) เสาเหล็กที่มีความยาวประสิทธิผล 10 เมตร ประกอบจากเหล็กแชนแนล C250 x 45 สองชุดที่ยึดติดกันเพื่อให้หน้าตัดมีโมเมนต์ความเฉื่อยเท่ากันรอบแกนหลัก จงหาภาระที่ปลอดภัยเมื่อใช้ข้อกำหนดของ AISC โดยใช้ σ_{yp} = 380 MPa และ E = 200 GPa

8) ในโครงข้อหมุนของสะพานตามรูปที่ P-1119 นั้น ชิ้นส่วน AC ประกอบด้วยเหล็กแชลแนล C9 x 20 สองชุด ที่ยึดติดกันเพื่อให้หน้าตัดมีโมเมนต์ความเฉื่อยเท่ากันรอบแกนสมมาตร ถ้าภาระปลอดภัย P ที่โครงข้อหมุนถูกควบคุมโดยกำลังของชิ้นส่วน AC แล้ว จงหาค่า P โดยใช้ข้อกำหนดของ AISC เมื่อ σ_{yp} = 36 ksi และ E = 29 x 10^6

9) จงแก้โจทย์ข้อ 8) โดยใช้เหล็กแชลแนล C10 x 30 สองชุด และ σ_{yp} = 50 ksi



รูปแบบฝึกหักข้อ 6)



รูปแบบฝึกหัดข้อ 8)

10) จงหาเหล็กรูป W ที่เบาที่สุดของโค้ง AB ในโครงข้อหมุนในรูปแบบฝึกหัดข้อที่ 8) ถ้า P = 60 kip โดยใช้ข้อกำหนดของ AISC เมื่อ σ_{yp} = 50 ksi และ E = 29 x 10^6 psi

11) จงเลือกเหล็กรูป W ที่เบาที่สุดที่ใช้เป็นเสาเพื่อรับภาระในแนวแกน 420 kN เมื่อความยาวประสิทธิผลเป็น 4 เมตร จงใช้ข้อกำหนดของ AISC เมื่อ σ_{yp} = 250 MPa และ E = 200 GPa

(ตอบ: W200 × 36)

12) จงหาเหล็กรูป W ที่เบาที่สุดตามข้อกำหนดของ AISC ซึ่งใช้เป็นเสาเพื่อรับภาระในแนวแกน 700 kN ที่ความยาวประสิทธิผล 5.5 เมตร โดยให้ σ_{yp} = 250 MPa และ E = 200 GPa

13) จงแก้โจทย์ข้อ 12) เมื่อภาระในแนวแกนเป็น 690 kN และ σ_{yp} = 345 MPa

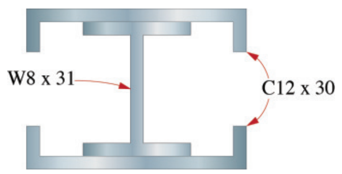
14) เสามีจุดหมุนที่ปลายยาว 30 ฟุต ประกอบจากคาน W8 x 31 และเหล็กแชลแนล C12 x 30 สองชุดที่ประกอบกันตามรูปแบบฝึกหัดข้อที่ 14) จงหาภาระในแนวแกนที่ปลอดภัยเมื่อใช้ข้อกำหนดของ AISC เมื่อ σ_{yp} = 36 ksi และ E = 29 x 10^6 psi (ตอบ: P = 354 kip)

15) จงหาสมการพาราโบล่าในรูปทั่วไป P/A = σ-C(L/r)^2 ซึ่งจะใช้ได้กับเสาอะลูมิเนียมผสมที่มีจุดหมุนที่ปลาย สมมุติว่าสมการพาราโบลาจะสัมผัสกับสมการของออยเลอร์ที่อัตราส่วนความปลอดภัย 2 ให้ใช้ σ = 110 MPa และ E = 70 GPa (แนะในสมการทั้งสองนั้นให้ภาระต่อหน่วยเท่ากันและหาอนุพันธ์ต่ออัตราความเรียวที่เท่ากัน)

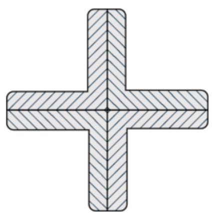
(ตอบ: P/A = (110 x 10^6)- 8760(L/r)^2 เมื่อ L/r < 79.3)

16) เหล็กฉาก 4 x 4 x 1/2 สี่ชุดยึดสันติดกันตามรูป จงหาภาระที่ปลอดภัยเมื่อใช้เป็นเสามีหมุดที่ปลายยาว 12 ฟุต โดยใช้ข้อกำหนดของ AISC และ σ_{yp} = 36 ksi และ E = 29 x 10^6 psi

17) จงหาภาระในแนวแกนที่ปลอดภัยที่ใช้กับเสาอะลูมิเนียมผสม 2014-T6 เมื่อความยาวเป็น (ก) 1 เมตร และ (ข) 3 เมตร สมมุติให้คุณสมบัติทางเรขาคณิตของหน้าตัดเหมือนกับหน้าตัดเหล็ก S310 x 52 (ตอบ: (ก) 984 kN; (ข) 172 kN)



รูปแบบฝึกหัดข้อ 14)



รูปแบบฝึกหัดข้อ 16)

18) จงหาภาระในแนวแกนที่ใช้ได้กับเสาอะลูมิเนียม 2014-T6 เมื่อความยาวเป็น (ก) 4 ฟุต และ (ข) 10 ฟุต สมมุติให้คุณสมบัติทางเรขาคณิตของหน้าตัดเหมือนกับหน้าตัดเหล็ก S12 x 35

(ตอบ: (ก) 200 kip; (ข) 37.4 kip)

19) จงแก้โจทย์ข้อ 18) โดยใช้คุณสมบัติของเหล็ก S12 x 50

20) จงหาภาระในแนวแกนที่ปลอดภัยของเสาไม้โอ้คขนาด 150 มม. x 200 มม. เมื่อยาว (ก) 2 เมตร และ (ข) 4 เมตร โดยใช้ E = 11.5 GPa

21) จงหาภาระในแนวแกนที่ปลอดภัยของเสาไม้สนขนาด นิ้ว x 8 นิ้ว เมื่อยาว (ก) 6 ฟุต และ (ข) 12 ฟุต โดยใช้ $E = 29 \times 10^{6}$ psi

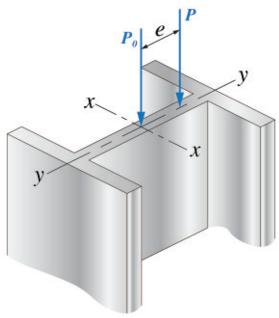
7.6 เสาที่มีภาระกระทำเยื้องศูนย์

ส่วนใหญ่วิศวกรมักจะออกแบบเสาให้รับภาระในแนวแกน และสมการที่กล่าวมาแล้วนั้นจะใช้ได้ในกรณีเช่นนี้ แต่ในเงื่อนไขบางประการนั้น เสาจะมีภาระที่มีระยะเยื้องศูนย์ (eccentrically loaded columns) ที่ชัดเจน ตัวอย่างเช่นในกรณีของคานที่ต่อกับเสาในอาคาร เป็นต้น

ในวิธี*ความเค้นประลัย*นั้น เราพิจารณาให้เสาที่มีภาระเบนศูนย์เป็นเสาสั้น อย่างไรก็ตามในการกำจัดการโก่งดัดที่จะไม่ต้องพิจารณาการโก่งของแขนโมเมนต์ต่อภาระเยื้องศูนย์นั้น ความเค้นอัดสูงสุดจะจำกัดอยู่ที่ค่าที่ได้จากสมการเสาที่กำหนด วิธีการนี้จะใช้ได้เฉพาะเมื่ออัตราความเรียวไม่มากจนเกินไปเท่านั้น

เมื่อใช้ขั้นตอนนี้กับเสาในรูปที่ 7-10 ซึ่งรับภาระในแนวแกน P_0 และภาระเบนศูนย์ P ที่ระยะเบนศูนย์ e แล้ว เราจะได้เกณฑ์การออกแบบดังนี้

$$\sigma \geq \frac{\Sigma P}{A} + \frac{Mc}{I} = \frac{P_0 + P}{A} + \frac{Pe}{S} \qquad (7\text{-}23)$$



รูปที่ 7-10 ภาระในแนวแกน P_0 และภาระเบนศูนย์ P ที่กระทำต่อเสา

ในที่นี้ σ เป็นความเค้นที่คำนวณจากสมการของเสาที่กำหนด (มักใช้รัศมีการหมุนที่น้อยที่สุดเพื่อหาอัตราความเรียว) I เป็นโมเมนต์ความเฉื่อยตามแกนซึ่งภาระเบนศูนย์ทำให้เกิดการดัด (แกน x-x ในรูปที่ 7-10 และ S เป็นสัมประสิทธิ์หน้าตัดตามแกนนั้น

เกณฑ์การออกแบบสมัยใหม่ได้ปรับปรุงความเค้นประลัยเพื่อใช้กับโมเมนต์ ที่เรียกว่า โมเมนต์ทุติยภูมิ (secondary moment) ซึ่งเกิดเนื่องจากแกนสะเทินได้โก่ง (เรียกว่าผล P-δ) เกณฑ์เหล่านี้มักจะอยู่ในรูปของสมการปฏิกิริยาตอบโต้ (interaction equation) ที่พยายาม "ชั่งน้ำหนัก" ระหว่างความสำคัญสัมพัทธ์ของความเค้นในแนวแกนและความเค้นดัด

ตัวอย่างเช่น AISC[6] แนะนำว่า เมื่อความเค้นดัดในแนวแกนที่คำนวณ F_a น้อยกว่า 15% ของความเค้นจริง F_a ที่เกิดขึ้นเมื่อมีเฉพาะความเค้นตามแนวแกนแล้ว เราอาจจะไม่พิจารณาโมเมนต์ทุติยภูมิได้และชิ้นส่วนจะต้องตรงตามเงื่อนไขดังต่อไปนี้

$$\frac{f_a}{F_a} + \frac{f_{bx}}{F_{bx}} + \frac{f_{by}}{F_{by}} \le 1.0 \qquad \text{(ก)}$$

เมื่อ $f_a > 0.15Fa$ แล้ว ผลของโมเมนต์ทุติยภูมิจะละเลยไม่ได้ ในกรณีเหล่านี้นั้น AISC กำหนดว่าจะต้องสอดคล้องกับสมการเหล่านี้ คือ

$$\frac{f_a}{F_a} + \frac{C_{mx} f_{bx}}{(1 - f_a / F'_{ex})F_{bx}} + \frac{C_{my} f_{by}}{(1 - f_a / F'_{ey})F_{by}} \le 1.0 \qquad \text{(ข)}$$

$$\frac{f_a}{0.60F_y} + \frac{f_{bx}}{F_{bx}} + \frac{f_{by}}{F_{by}} \le 1.0 \qquad \text{(ค)}$$

ในสมการ (ก), (ข) และ (ค) นั้น พจน์ต่างๆ จะมีค่าดังนี้

f_a = ความเค้นตามแนวแกนที่คำนวณ

F_a = ความเค้นตามแนวแกนที่ยินยอมได้เมื่อแรงตามแนวแกนกระทำอย่างเดียว

f_{bx} = ความเค้นดัดที่คำนวณรอบแกนหลักโดยไม่พิจารณาโมเมนต์ทุติยภูมิ

f_{by} = ความเค้นดัดที่ยินยอมรอบแกนรองโดยไม่พิจารณาโมเมนต์ทุติยภูมิ

F_{bx} = ความเค้นอัดที่ยินยอมรอบแกนหลักเมื่อโมเมนต์กระทำอย่างเดียว

F_{by} = ความเค้นอัดที่ยินยอมรอบแกนรองเมื่อโมเมนต์กระทำอย่างเดียว

F'_{ex} = ความเค้นโก่งดัดของออยเลอร์รอบแกนหลัก

F'_{ey} = ความเค้นโก่งดัดของออยเลอร์รอบแกนรอง

C_{mx}, C_{my} = ตัวคูณลดเพื่อแก้ไขค่าที่ปลอดภัยเกินพอในตัวคูณขยายบางกรณี $[1 - (f_a / F'_e)]$

F_y = ความเค้นคลาก

สำหรับชิ้นส่วนรับแรงอัดในโครงที่มีจุดต่อร่วม หรือชิ้นส่วนด้านข้างนั้น C_m อาจเป็น 0.85

[6] ใช้สัญลักษณ์ในที่นี้ตาม Manual of Steel Construction, American Institute of Steel Construction, New York, 8th ed., 1980

สำหรับชิ้นส่วนรับภาระอัดในโครงที่จำกัดทางด้านข้างและมีโมเมนต์ที่หลายนั้น (แต่ไม่มีภาระขวางระหว่างจุดรองรับ) จะใช้ $C_m = 0.6 - 0.4 (M_1/M_2) > 0.4$ เมื่อ M_1/M_2 เป็นอัตราส่วนของโมเมนต์ปลายที่น้อยกว่าต่อโมเมนต์ปลายที่น้อยกว่าต่อโมเมนต์ปลายที่มากกว่า อัตราส่วนนี้จะเป็นค่าบวกเมื่อชิ้นส่วนดัดตัวจนโค้งไปมา และเป็นลบเมื่อดัดตัวโค้งด้านเดียว

สำหรับชิ้นส่วนรับแรงอัดในโครงที่จำกัดทางด้านข้างในระนาบที่มีภาระและเกิดภาระด้านขวางระหว่างจุดรองรับนั้น C_m อาจเป็น 0.85 สำหรับชิ้นส่วนที่ตรึงปลายและเป็นหนึ่งสำหรับชิ้นส่วนที่ไม่ตรึงปลาย และอาจจะหาค่า C_mได้จากการวิเคราะห์ตามเหตุผลในกรณีนี้

ข้อกำหนดของ AISC ยังคงกำหนดสมการเพื่อหาความเค้นดัดที่ยินยอมได้ F_b ให้เป็นเศษส่วนของความเค้นคลาก ค่าของ F_b จะขึ้นอยู่กับคุณสมบัติของหน้าตัดและช่วงที่ยึดไว้

สมการปฏิกิริยาคล้ายกับสมการของ AISC ยังมีใช้สำหรับวัสดุอื่น เช่น ไม้และอะลูมิเนียมอีกด้วย

การออกแบบชิ้นส่วนเพื่อจะรับทั้งภาระในแนวแกนและภาระดัดนั้นเป็นขั้นตอนที่ซ้ำซาก เราจะตรวจสอบความพอเพียงของหน้าตัดที่สมมุติโดยใช้เกณฑ์ที่เหมาะสม ขั้นตอนนี้จะง่ายขึ้นมากโดยใช้ตารางและกราฟหลายรายการซึ่งช่วยในการออกแบบ และยังมีโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ช่วยนักออกแบบให้เลือกหน้าตัดที่เหมาะสมซึ่งตรงกับสมการปฏิกิริยาอีกด้วย

ตัวอย่างข้างล่างนี้จะแสดงการใช้วิธีความเค้นประลัย หรับการใช้สมการปฏิกิริยานั้น ขอให้ดูจากตำราการออกแบบโครงสร้างอื่นๆ[7]

ตัวอย่างที่ 7.4

หน้าตัด W360×134 ถูกใช้เป็นเสาที่มีความยาวประสิทธิผล 7 เมตร เพื่อรองรับเครนเคลื่อนที่ในโรงงาน จงหาแรงปฏิกิริยา P สูงสุด เมื่อเสายังรับภาระ 400 kN จากชั้นบนตามรูป โดยใช้วิธีความเค้นประลัย (สมการที่ 7-15) และข้อกำหนดของ AISC เกี่ยวกับเสา

รูปตัวอย่างที่ 7.4

[7] ดู L.A. Hill, Jr., Fundamentals of Structural design: Steel, Concrete and Timber, Intext. New York, 1975 เป็นต้น

วิธีทำ

จากตารางหน้าตัด W จะให้คุณสมบัติของหน้าตัด W360 x 134 คือ A = 17,100 ตร.ม $S_x = 2330 \times 10^3$ mm^3 และ r น้อยที่สุด 94.0 มม. อัตราความเรียวเป็น L_e/r เมื่อ σ_{yp} = 250 MPa นั้น อัตราความเรียววิกฤตจะเป็น

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_{yp}}} = \sqrt{\frac{2\pi^2(200\times10^9)}{250\times10^6}} = 126$$

เนื่องจาก $L_e/r < C_c$ สมการของ AISC ที่เหมาะสม (สมการที่ 7-16) จะกำหนดความเค้นที่ใช้งานดังนี้

$$\left[FS = \frac{5}{3}+\frac{3(L_e/r)}{8C_c}-\frac{(L_e/r)^3}{8C_c^3}\right] \qquad FS = \frac{5}{3}+\frac{3(74.5)}{8(126)}-\frac{(74.5)^3}{8(126)^3} = 1.86$$

ซึ่งได้ $$\left[\sigma_w = \frac{[1-(L_e/r)^2/2C_c^2]\sigma_{yp}]}{FS}\right]$$

$$\sigma_w = \frac{[1-(74.5)^2/2(126)^2]}{1.86}(250\times10^6) = 111\text{MPa}$$

เมื่อใช้วิธีความเค้นประลัยแล้ว เราจะพิจารณาว่าเสาเป็นชิ้นส่วนสั้นที่รับแรงอัดและรับภาระเบนศูนย์ที่จำกัดความเค้นประลัยเป็น 111 MPa เมื่อใช้สมการที่ 7-23 แล้ว เราจะได้

ซึ่งจะได้ $$\left[\sigma = \frac{\Sigma P}{A}+\frac{Pe}{S}\right]$$

$$111\times10^6 = \frac{(400\times10^3+P)}{17100\times10^{-6}}+\frac{0.125P-0.075(400\times10^3)}{2330\times10^{-6}}$$

$$P = 896\times10^3 \quad N = 896\text{ kN}$$ ตอบ

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 7

ในแบบฝึกหัดต่อไปนี้นั้น จงใช้วิธีความเค้นประลัยและข้อกำหนดของ AISC เกี่ยวกับเสาเมื่อไม่ได้กำหนดไว้เป็นอย่างอื่น

1) หน้าตัด W360 x 122 ถูกใช้เป็นเสาที่มีความยาวประสิทธิผล 10 เมตร จงหาภาระสูงสุดที่กระทำเบนศูนย์ที่ระยะ 300 มม. และควรวางภาระที่แกน X หรือแกน Y สมมุติให้ σ_{yp} = 260 MPa และ E = 200 GPa (ตอบ: P = 190 kN)

2) จงแก้โจทย์ข้อ 1) เมื่อเสามีความยาวประสิทธิผลเป็น 4.5 เมตร

3) เสาเหล็กขนาด 2 นิ้ว x 3 นิ้ว มีความยาวประสิทธิผล 5 ฟุต จงหาภาระสูงสุดที่กระทำเบนศูนย์ที่ระยะ 5 นิ้วจากแกนที่อ่อนแอ สมมุติให้ σ_{yp} = 36 ksi และเสายังมีภาระในแนวแกน 11 kip จงใช้ E = 29 x 106 psi

4) ท่อเหล็กยาว 8 ฟุต ฝังปลายล่างและมีปลายบนอิสระ และยึดป้ายเครื่องหมายที่จุดศูนย์ถ่วงห่างจากแกนของเสา 2 ฟุต เมื่อใช้แนวความคิดของความยาวประสิทธิผลแล้ว จงหาน้ำหนักสูงสุดที่ยินยอมได้ของป้ายเครื่องหมาย เมื่อเส้นผ่าศูนย์กลางภายนอกของท่อเป็น 4.50 นิ้ว พื้นที่หน้าตัด 3.174 in.^{2} และโมเมนต์ความเฉื่อยเป็น 7.233 in.^{4} โดยใช้ σ_{yp} = 50 ksi และ E = 29 x 10^6 psi

5) หน้าตัด W360 x 134 ถูกใช้เป็นเสาที่ความยาวประสิทธิผลเป็น 6 เมตร เสารับภาระในแนวแกน 260 kN และภาระเบนศูนย์ 220 kN แกนรอง จงหา e ซึ่งเป็นระยะเบนศูนย์สูงสุดของภาระ โดยใช้ σ_{yp} = 50 ksi และ E = 29 x 10^6 psi

6) เหล็กแชลแนล C310 x 45 ถูกใช้เป็นเสายาว 2.2 เมตร ที่ปลายมีหมุดหมุน ภาระขนาด 50 kN จะกระทำห่างจากจุดศูนย์กลางทางแกน X ได้เท่าใด เมื่อ σ_{yp} = 380 MPa และความเค้นดึงไม่เกิน 140 MPa และต้องวางภาระไว้ที่ด้านใดของแกน Y ให้ใช้ E = 200 GPa

(ตอบ: 100 มม.)

7) จงแก้โจทย์ข้อ 6) โดยใช้เหล็กแชลแนล C310 x 31

8) เหล็ก W14 x 90 ถูกใช้เป็นเสาที่มีความยาว 30 ฟุต เสารองรับภาระในแนวแกน 65 kN และภาระเบนศูนย์ 90 kip กระทำที่แกน Y จงหาระยะเบนศูนย์สุงสุดขนาด 90 kip โดยใช้วิธีความเค้นประลัยและข้อกำหนดของ AISC เมื่อ σ_{yp} = 50 ksi และ E = 29 x 10^6 psi

(ตอบ: 15.2 นิ้ว)

9) จงแก้โจทย์ข้อ 8) โดยใช้เหล็ก W14 x 311

บทที่ 8
วิธีพลังงาน

8.1 บทนำ

ในบทนี้จะได้แสดงการใช้วิธีพลังงานเพื่อแก้ปัญหาเกี่ยวกับการทรุดตัวหรือการโก่งตัว (deflection) เริ่มต้นจะกล่าวถึงงานและพลังงานความเครียดตามด้วยการพัฒนาหลักการของการอนุรักษ์พลังงาน โดยใช้หลักการทั้งสองนี้หาค่าหน่วยแรงระยะการทรุดตัวของชิ้นส่วน เมื่อชิ้นส่วนถูกกระแทก วิธีการของงานเสมือนและทฤษฎีของคาสทีเกียร์โน (Castigliano Theorem) ถูกพัฒนาขึ้นเพื่อใช้หาระยะการขจัดและค่าความชันที่จุดที่อยู่บนชิ้นส่วนของโครงสร้างและชิ้นส่วนทางกลศาสตร์ งานภายนอกและพลังงานความเครียด (external work and strain energy)

ก่อนที่จะทำการพัฒนาวิธีพลังงานใดๆ ที่นำไปใช้ตลอดบทนี้เริ่มต้นต้องทราบนิยามของงานที่เกิดโดยแรงภายนอกและโมเมนต์คู่ควบรวมทั้งแสดงงานของพลังงานความเครียดของวัตถุในหัวข้อถัดไปจะได้กล่าวถึงพื้นฐานสำหรับการนำวิธีพลังงานและงานไปใช้

8.2 งานของแรง

ในทางกลศาสตร์แรงทำให้เกิดงานเมื่อแรงทำให้เกิดระยะขจัด dx ในทิศทางเดียวกันกับแรงและงานที่ทำสามารถเขียนเป็นสมการสเกลาร์ คือ $dU_2 = Fdx$ ถ้าระยะการขจัดทั้งหมด คือ x งานจะกลายเป็น

$$U_e = \int_o^x Fdx \tag{8-1}$$

เพื่อแสดงการประยุกต์ใช้สมการนี้ สามารถคำนวณหางานที่ทำโดยแรงกระทำตามแนวแกนที่กระทำที่ส่วนปลายของแท่ง เมื่อขนาดของแรง F เพิ่มขึ้นจากศูนย์ไป F = P ระยะการขจัดสุดท้ายของส่วนปลายของแท่งจนกลายเป็น Δ ถ้าวัสดุมีพฤติกรรมยืดหยุ่นเชิงเส้นแล้วแรงจะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับระยะการขจัด นั่นคือ $F = (P/\Delta)x$ แทนค่าในสมการที่ 8-1 และทำการอินทิเกรต จาก 0 ถึง Δ จะได้ว่า

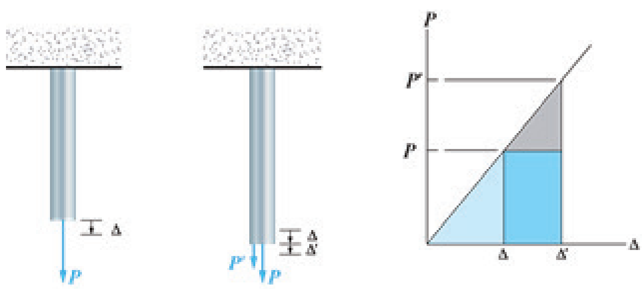
$$U_e = \frac{1}{2}P\Delta \tag{8-2}$$

ดังนั้น แรงที่กระทำต่อแท่งขนาดของแรงเริ่มจากศูนย์ไปยังค่า P และงานที่ทำมีค่าเท่ากับขนาดแรงเฉลี่ย (average force magnitude) P/2 คูณกับระยะการขจัดทั้งหมด Δ สามารถแสดงในเชิงกราฟฟิกดังแสดงในพื้นที่ซึ่งแรเงาของรูปสามเหลี่ยมดังแสดงในรูปที่ 8-1(ก)

สมมุติว่า P กระทำต่อแท่งทรงกลมและอีกแรง P' กระทำในเวลาเดียวกัน ดังนั้นปลายของแท่งถูกแทนที่ด้วยปริมาณ Δ' ดังแสดงในรูปที่ 8-1(ข) งานที่ทำโดย P (ไม่ใช่ P') เมื่อแท่งเกิดการขจัดนี้ Δ' คือ

$$U_e = P\Delta' \tag{8-3}$$

งานแทนด้วยรูปพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้า (rectangular area) ที่แรงเงาในรูปที่ 8-1(ค) ในกรณีนี้ P ยังไม่เปลี่ยนแปลงขนาดเนื่องจากระยะการขจัดของแท่ง Δ' ที่เกิดโดย P' ดังนั้น งานคือขนาดแรง P คูณกับระยะการขจัด Δ'



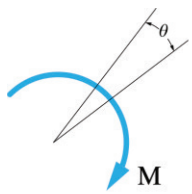
(ก) (ข) (ค)

รูปที่ 8-1 แรงที่กระทำกับแท่งวัตถุทำให้เกิดการยืดตัว

เมื่อแรง P กระทำต่อแท่ง ตามด้วยการกระทำของแรง P' งานที่ทำได้ทั้งหมดโดยแรงทั้งสองจะแทนโดยพื้นที่รูปสามเหลี่ยมทั้งหมด ในรูปที่ 8-1(ค) พื้นที่สามเหลี่ยมที่แรเงาแทนงานของ P ที่เกิดจากระยะการขจัด Δ พื้นที่รูปสามเหลี่ยมที่แรเงาสีจางแทนงานที่เกิดจาก P' เนื่องจากแรงนี้ทำให้เกิดระยะการขจัด Δ' และพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่แรเงาสีเข้มแทนงานส่วนที่เพิ่มเติมโดยแรง P เมื่อแรง P เกิดระยะการขจัด Δ' ซึ่งมีค่าเท่ากันกับงานที่เกิดจาก P'

งานของโมเมนต์คู่ควบ (work of a couple moments) โมเมนต์คู่ควบ M ทำให้เกิดงานเมื่อมีระยะการขจัดเชิงมุม $d\theta$ ตามแนวเส้นของการกระทำของโมเมนต์ งานที่ทำถูกนิยามเป็น $dU_e = Md\theta$ ในรูปที่ 8-2 ถ้ามุมของระยะการขจัดเชิงมุมทั้งหมดคือ θ เรเดียน สมการของงานคือ

$$U_e = \int_o^{\theta} Md\theta \tag{8-4}$$



รูปที่ 8-2 โมเมนต์คู่ควบ M ทำให้เกิดงานเมื่อมุมของระยะการขจัดเชิงมุมทั้งหมดคือ θ เรเดียน

ในกรณีที่โมเมนต์คู่ควบกระทำต่อวัตถุ (body) ที่มีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นเชิงเส้น นั่นคือขนาดของโมเมนต์เริ่มจากศูนย์ที่ $\theta = 0$ และเพิ่มเป็น M ที่ θ แล้ว สมการของงานคือ

$$U_e = \frac{1}{2}M\theta \tag{8-5}$$

อย่างไรก็ตาม ถ้าโมเมนต์คู่ควบกระทำต่อวัตถุและมีแรงคนกระทำอื่นๆ หมุนวัตถุด้วยปริมาณ θ' แล้วงานคือ

$$U'_e = M\theta'$$

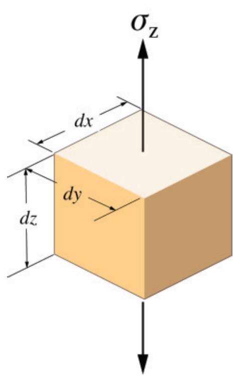
พลังงานความเครียด (strain energy) เมื่อแรงกระทำต่อวัตถุ แรงจะทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของวัสดุ และไม่มีพลังงานที่สูญหายไปในรูปของความร้อน งานภายนอกที่ทำโดยแรงกระทำจะถูกเปลี่ยนเป็นพลังงานภายในเรียกว่า พลังงานความเครียด (strain energy) พลังงานนี้จะมีค่าเป็นบวกและถูกเก็บสะสมในวัตถุและเกิดจากการกระทำของหน่วยแรงตั้งฉากปกติหรือหน่วยแรงเฉือน

หน่วยแรงตั้งฉากปกติ (normal stress) ถ้าชิ้นส่วนเชิงปริมาตรดังแสดงในรูปที่ 8-3 ถูกกระทำด้วยหน่วยแรงตั้งฉากปกติ σ_z แล้วแรงที่เกิดบนพื้นผิวส่วนบนและส่วนล่าง คือ $dF_z = \sigma_z dA = \sigma_z dx\,dy$ ถ้าแรงนี้ถูกกระทำต่อชิ้นส่วนคล้ายแรง P ที่กล่าวมาแล้วก่อนหน้านี้ ขนาดของแรงจะเพิ่มขึ้นจากศูนย์เป็น dF_z ในขณะที่ชิ้นส่วนระยะเกิดการขจัด $d\Delta_z = \varepsilon_z dZ$ งานที่ทำโดย dF_z คือ

$$dU_i = \frac{1}{2}dF_z d\Delta_z = \frac{1}{2}\left[\sigma_z dx\,dy\right]\varepsilon_z dz$$

เนื่องจากปริมาตรของชิ้นส่วนคือ $dV = dx\,dy\,dz$ จะได้ว่า

$$dU_i = \frac{1}{2}\sigma_z \varepsilon_z dV \tag{8-6}$$



รูปที่ 8-3 ชิ้นส่วนเชิงปริมาตรถูกกระทำด้วยหน่วยแรงตั้งฉากปกติ σ_2

พบว่า U_i มีค่าเป็นบวกเสมอ ถึงแม้ว่า σ_z เป็นหน่วยแรงอัด เนื่องจาก σ_z และ ε_z มีทิศทางเดียวกัน

โดยทั่วไป ถ้าวัตถุกระทำด้วยหน่วยแรงตั้งฉากปกติตามแนวแกน (uniaxial normal stress) σ และกระทำในทิศทางที่สอดคล้องกัน พลังงานความเครียดในวัตถุ คือ

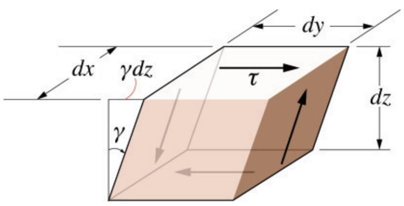
$$U_i = \int_v \frac{\sigma\varepsilon}{2} dV \qquad (8\text{-}7)$$

นอกจากนั้น ถ้าวัสดุมีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นเชิงเส้น สามารถประยุกต์ใช้กฎของฮุค $\sigma = E\varepsilon$ และสามารถแสดงพลังงานความเครียดในรูปของหน่วยแรงตั้งฉากปกติ คือ

$$U_i = \int_v \frac{\sigma^2}{2E} dV \qquad (8\text{-}8)$$

หน่วยแรงเฉือน (shear stress) การแสดงพลังงานความเครียดคล้ายคลึงกันกับหน่วยแรงตั้งฉากปกติสำหรับวัสดุเมื่อถูกกระทำด้วยหน่วยแรงเฉือน พิจารณาชิ้นส่วนเชิงปริมาตรในรูปที่ 8-4 หน่วยแรงเฉือนจะทำให้ชิ้นส่วนเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง กล่าวคือ แรงเฉือน $dF = \tau(dx\,dy)$ ซึ่งกระทำบนผิวของชิ้นส่วน และเกิดระยะการขจัดที่ผิวของชิ้นส่วนเท่ากับ γdz วัดแบบสัมพันธ์กับผิวส่วนล่าง ผิวในแนวดิ่ง (vertical faces) เกิดการหมุนและแรงเฉือนบนผิวในแนวดิ่งนี้ไม่เกิดงาน ดังนั้นพลังงานความเครียดที่ถูกสะสมไว้ในชิ้นส่วน คือ

$$dU_i = \frac{1}{2}\left[\tau(dxdy)\right]\gamma dz$$



รูปที่ 8-4 วัสดุเมื่อถูกกระทำด้วยหน่วยแรงเฉือนจะทำให้ชิ้นส่วนเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง

หรือ

$$dU_i = \frac{1}{2}\tau\gamma dV \qquad (8\text{-}9)$$

เมื่อ $dV = dx\,dy\,dz$ เป็นปริมาตรของชิ้นส่วนทำการอินทิเกรตครอบคลุมปริมาตรทั้งหมดของวัตถุเพื่อหาพลังงานความเครียดที่เก็บสะสมในวัตถุ จะได้ว่า

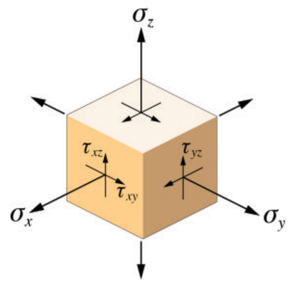
$$U_i = \int_v \frac{\tau\gamma}{2} dV \qquad (8\text{-}10)$$

คล้ายคลึงกันกับกรณีของหน่วยแรงตั้งฉากปกติ พลังงานความเครียดเฉือนจะมีค่าเป็นบวกเสมอ เนื่องจาก τ และ γ มีทิศทางเดียวกัน ถ้าวัสดุมีลักษณะยืดหยุ่นเชิงเส้นแล้วสามารถประยุกต์กฎของฮุค $\gamma = \tau / G$ จึงสามารถแสดงสมการของพลังงานความเครียดในรูปของหน่วยแรงเฉือน คือ

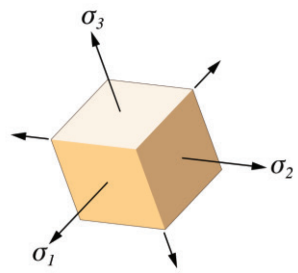
$$U_i = \int_v \frac{\tau^2}{2G} dV \qquad (8\text{-}11)$$

ในหัวข้อถัดไปจะใช้สมการที่ 8-8 และ 8-11 เพื่อคำนวณหาพลังงานความเครียดที่ถูกเก็บสะสมในชิ้นส่วน ซึ่งถูกกระทำด้วยแรงกระทำชนิดต่างๆ และพัฒนาวิธีพลังงานที่จำเป็นเพื่อหาระยะการขจัดและค่าความชันที่จุดบนวัตถุ

หน่วยแรงที่เกิดขึ้นตามแนวแกนหลายแกน (multiaxial stress) การพัฒนาเพื่อหาพลังงานความเครียดในวัตถุเมื่อถูกกระทำด้วยสภาวะของหน่วยแรงแบบทั่วไปดังแสดงในรูปที่ 8-5(ก) พลังงานความเครียดที่สอดคล้องกันกับแต่ละองค์ประกอบของค่าหน่วยแรงตั้งฉากปกติและค่าหน่วยแรงเฉือนสามารถหาได้จากสมการที่ 8-6 และสมการที่ 8-9 เนื่องจากพลังงานเป็นปริมาณสเกลาร์ พลังงานความเครียดทั้งหมดในวัตถุ คือ



(ก)



(ข)

รูปที่ 8-5 พลังงานความเครียดในวัตถุเมื่อถูกกระทำด้วยสภาวะของหน่วยแรงแบบทั่วไป

$$U_i = \int_v \left[\frac{1}{2}\sigma_x\varepsilon_x + \frac{1}{2}\sigma_y\varepsilon_y + \frac{1}{2}\sigma_z\varepsilon_z + \frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy} + \frac{1}{2}\tau_{yz}\gamma_{yz} + \frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xz} \right] dV \qquad (8\text{-}12)$$

ค่าความเครียดสามารถขจัดให้หายไปได้โดยการใช้รูปแบบทั่วไป จากกฎของแทนค่าและรวมเทอมต่างๆ จะได้ว่า

$$U_i = \int_v \left[\frac{1}{2E}(\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2) - \frac{v}{E}(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_x\sigma_z) + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{xz}^2) \right] dV \qquad (8\text{-}13)$$

ถ้ามีเพียงค่าหน่วยแรงหลัก σ_1, σ_2 และ σ_3 กระทำต่อชิ้นส่วน สมการนี้สามารถลดลงเป็นรูปแบบอย่างง่าย นั่นคือ

$$U_i = \int_v \left[\frac{1}{2E}(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2) - \frac{v}{E}(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_1\sigma_3) \right] dV \qquad (8\text{-}14)$$

8.3 พลังงานความเครียดแบบยืดหยุ่นสำหรับแรงกระทำชนิดต่างๆ

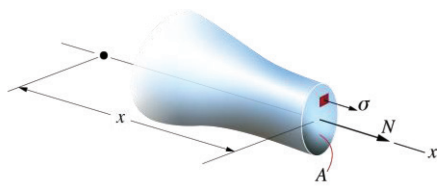
โดยใช้สมการของพลังงานความเครียดแบบยืดหยุ่นที่พัฒนาในหัวข้อก่อนหน้านี้ สร้างรูปสมการพลังงานความเครียดที่ถูกเก็บสะสมในชิ้นส่วนเมื่อถูกกระทำด้วยแรงกระทำตามแกน โมเมนต์ดัด แรงเฉือนตามแนวขวางและโมเมนต์บิด ในตัวอย่างได้แสดงการคำนวณค่าของพลังงานความเครียดในชิ้นส่วนที่ถูกกระทำด้วยแรงกระทำดังกล่าวนี้

แรงกระทำตามแนวแกน (axial load) พิจารณาแท่งของหน้าตัดปลายเรียวเล็กที่แปรค่าเล็กน้อย ซึ่งถูกกระทำด้วยแรงกระทำตามแนวแกนทับกับแกนเซนทรอยด์ของแท่ง ดังแสดงในรูปที่ 8-6 แรงตามแนวแกนภายใน (internal axial force) ที่กระทำต่อหน้าตัดอยู่ที่ระยะ x จากปลายด้านหนึ่ง คือ N ถ้าพื้นที่หน้าตัดที่หน้าตัดนี้ คือ A แล้วค่าหน่วยแรงตั้งฉากปกติบนหน้าตัด คือ $\sigma = N/A$ ประยุกต์ใช้สมการที่ 8-8 จะได้ว่า

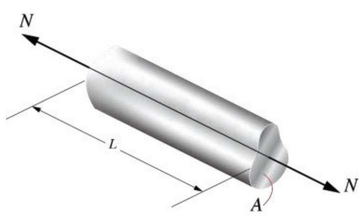
$$U_i = \int_v \left[\frac{\sigma_x^2}{2E}\right] dV = \int_v \frac{N^2}{2EA^2} dV$$

ถ้าเลือกชิ้นส่วนหรือชิ้นเล็กๆ ที่มีปริมาตร $dV = Adx$ สมการทั่วไปสำหรับพลังงานความเครียดที่เกิดขึ้นในแท่งวัตถุ คือ

$$U_i = \int_o^L \frac{N^2}{2AE} dx \qquad (8\text{-}15)$$



รูปที่ 8-6 แท่งของหน้าตัดปลายเรียวเล็กที่แปรค่าเล็กน้อย ซึ่งถูกกระทำด้วยแรงกระทำตามแนวแกนทับกับแกนศูนย์ถ่วงของแท่ง



รูปที่ 8-7 แท่งรูปสี่เหลี่ยมที่มีพื้นที่หน้าตัดคงที่ A ความยาว L และแรงกระทำตามแนวแกนคงที่ N

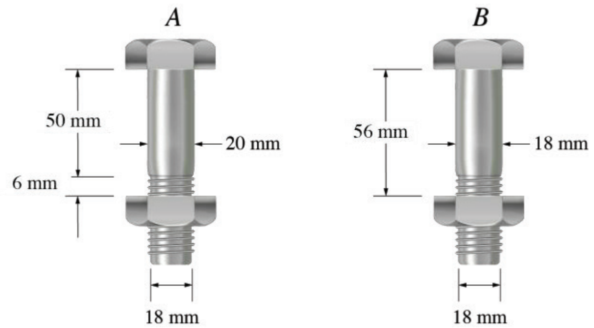
สำหรับกรณีทั่วไปของแท่งรูปสี่เหลี่ยมที่มีพื้นที่หน้าตัดคงที่ A ความยาว L และแรงกระทำตามแนวแกนคงที่ N ดังแสดงในรูปที่ 8-7 สมการที่ 8-15 เมื่อทำอินทิเกรต จะได้ว่า

$$U_i = \frac{N^2L}{2AE} \tag{2-16}$$

จากสมการนี้ พบว่าพลังงานความเครียดแบบยืดหยุ่นของแท่งเพิ่มขึ้น ถ้าความยาวของแท่งเพิ่มขึ้น หรือถ้าโมดูลัสของความยืดหยุ่นหรือพื้นที่หน้าตัดลดลง ยกตัวอย่างเช่น แท่งอลูมิเนียม (E_{al} = 70 GPa) เก็บสะสมพลังงานได้มากกว่าแท่งเหล็กถึงสามเท่าโดยประมาณ (E_{st} = 200 GPa) และต้องมีขนาดเท่ากับและถูกกระทำด้วยแรงกระทำเดียวกัน หรือพูดอีกนัยหนึ่งว่า ถ้าพื้นที่หน้าตัดเพิ่มขึ้นเป็นสองเท่าประสิทธิภาพของการเก็บสะสมพลังงานความเครียดจะลดลงครึ่งหนึ่ง

<u>ตัวอย่างที่ 8.1</u>

สลักเกลียวเหล็กกำลังสูงทั้งสองคือ A และ B ดังแสดงในรูป ถูกเลือกเพื่อรองรับแรงกระทำแบบดึงในทันทีทันใดและมีข้อจำกัด คือ ต้องการหาค่าที่มากที่สุดของพลังงานความเครียดแบบยืดหยุ่นที่แต่ละสลักเกลียวสามารถดูดซับได้ สลักเกลียว A มีเส้นผ่าศูนย์กลาง 20 mm ยาว 50 mm และเส้นผ่านศูนย์กลางของตัวสลักเกลียวที่ฐาน (หรือเล็กที่สุด) 18 mm ระยะห่างของเกลียวกับน๊อต 6 mm สลักเกลียว B มีเกลียวยาว 56 mm เส้นผ่านศูนย์กลาง 18 mm ทั้งสองกรณีไม่คิดวัสดุส่วนเกินที่มีระยะเกลียวทะลุน็อตขึ้นไป กำหนดให้ค่า E = 210 GPa และ σ_y = 310 MPa



รูปตัวอย่างที่ 8.1

วิธีทำ

สลักเกลียว A (bolt A) ถ้าสลักเกลียวถูกกระทำด้วยแรงดึงที่มากที่สุด หน่วยที่แรงมากที่สุด σ_y = 310 MPa จะเกิดขึ้นภายในช่วงความยาว 6 mm แรงดึงนี้ คือ

$$P_{max} = \sigma_y A = 310\,\text{N/mm}^2\left[\pi\left(\frac{18\,\text{mm}}{2}\right)^2\right] = 78.89\,\text{kN}$$

ประยุกต์ใช้สมการที่ 8-16 ในแต่ละช่วงของสลักเกลียว จะได้ว่า

$$U_i = \sum \frac{N^2 L}{2AE}$$

$$= \frac{(78.89\times10^3\ \text{N})^2(50\,\text{mm})}{2\left[\pi(20\,\text{mm}/2)^2\right]\left[210\times10^3\ \text{N/mm}^2\right]} + \frac{(78.89\times10^3\ \text{N})^2(6\,\text{mm})}{2\left[\pi(18\,\text{mm}/2)^2\right]\left[210\times10^3\ \text{N/mm}^2\right]}$$

$$= 2707.8\ \text{N.mm}$$

สลักเกลียว B (bolt B) เมื่อสลักเกลียวถูกสมมุติว่ามีเส้นผ่านศูนย์กลางอย่างสม่ำเสมอ 18 mm ตลอดความยาว 56 mm นอกจากนั้น จากการคำนวณข้างต้นสามารถรองรับแรงดึงที่มีค่ามากที่สุด P_{max} 78.89 kN ดังนั้น

$$U_i = \frac{N^2 L}{2AE} = \frac{(78.89\times10^3\ \text{N})^2(56\,\text{mm})}{2[\pi(18/2)^2][210\times10^3\ \text{N/mm}^2]} = 3261.0\,\text{N.mm} \qquad \text{ตอบ}$$

จากการเปรียบเทียบ สลักเกลียว B สามารถดูดซับพลังงานความยืดหยุ่นได้มากกว่าสลักเกลียว A ถึงร้อยละ 20 ถึงแม้ว่าจะมีหน้าตัดเล็กกว่าตามส่วนของขาตอนล่างบริเวณสลักเกลียว (shank)

โมเมนต์ดัด (bending moment) เนื่องจากโมเมนต์ดัดกระทำต่อชิ้นส่วนที่เป็นรูปเหลี่ยมเหยียดตรงเกิดหน่วยแรงตั้งฉากปกติ (normal stress) ในชิ้นส่วนสามารถใช้สมการที่ 8-8 เพื่อหาพลังงานความเครียดที่สะสมในชิ้นส่วนเนื่องจากโมเมนต์ดัด ยกตัวอย่างเช่น พิจารณาคานที่สมมาตรตามแนวแกนดังแสดงในรูปที่ 8-8 โมเมนต์ดัดภายใน คือ M และหน่วยแรงตั้งฉากปกติที่กระทบบนชิ้นส่วนที่ระยะ Y จากแนวแกนสะเทิน คือ σ = My/I ถ้าปริมาตรของชิ้นส่วน คือ dV = dA dx เมื่อ dA คือพื้นที่ผิวหน้า และ dx เป็นความยาวของชิ้นส่วนพลังงานความเครียดแบบยืดหยุ่นในคาน คือ

$$U_i = \int_v \frac{\sigma^2}{2E}\,dV = \int_v \frac{1}{2E}\left(\frac{My}{I}\right)^2 dA\,dx$$

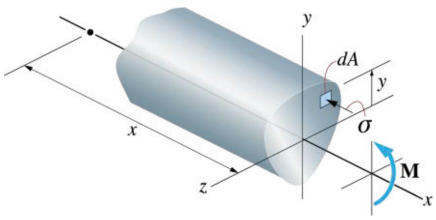
ทำการอินทิเกรตครอบคลุมปริมาตรทั้งหมด สามารถแสดงเป็นผลคูณของการอินทิเกรตครอบคลุมพื้นที่หน้าตัดของคาน A และอินทิเกรตครอบคลุมความยาวของคาน L ดังนั้น

$$U_i = \int_o^L \frac{M^2}{2EI^2}\left(\int_A y^2 dA\right)dx$$

พึงตระหนักว่า การอินทิเกรตของพื้นที่สามารถแทนได้ด้วยโมเมนต์ของความเฉื่อยของคานรอบแกนทะเทิน ผลลัพธ์สุดท้ายสามารถเขียนได้ในรูปของ

$$U_i = \int_o^L \frac{M^2 dx}{2EI} \qquad (8\text{-}17)$$

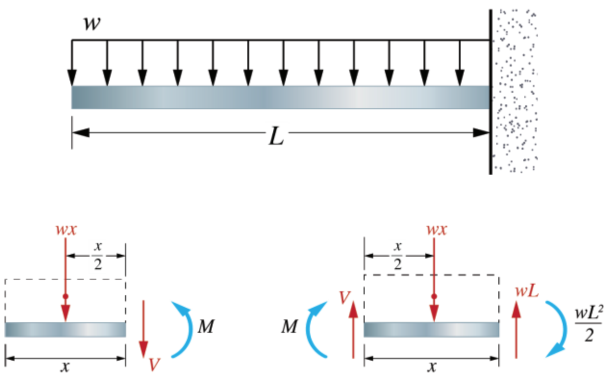
เพื่อหาค่าพลังงานความเครียด ดังนั้น เริ่มแรกจะต้องแสดงโมเมนต์ภายในเป็นฟังก์ชั่นของตำแหน่ง x ตามแนวคาน แล้วทำการอินทิเกรตตลอดความยาวทั้งหมดของคาน



รูปที่ 8-8 การหาพลังงานความเครียดโดยการอินทิเกรตตลอดความยาวคาน

<u>ตัวอย่างที่ 8.2</u>

จงคำนวณหาพลังงานความเครียดแบบยืดหยุ่นเนื่องจากโมเมนต์ตัดของคานอื่น ถ้าคานถูกกระทำด้วยแรงกระทำแบบกระจายอย่างสม่ำเสมอ w ดังแสดงในรูป เมื่อ EI เป็นค่าคงที่



รูปตัวอย่างที่ 8.2

<u>วิธีทำ</u>

โมเมนต์ตัดภายในคานหาได้ในเทอมของพิกัด x เทียบกับจุดเริ่มต้นด้านซ้ายมือดังแสดงในรูป จะได้ว่า

$$\curvearrowleft + \sum M_{NA} = 0; \qquad M + wx\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

$$M = -w\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

ประยุกต์ใช้สมการที่ 8-17 จะได้ว่า

$$U_i = \int_o^L \frac{M^2 dx}{2EI} = \int_o^L \frac{[-w(x^2/2)]^2 dx}{2EI} = \frac{w^2}{8EI}\int_o^L x^4 dx$$

หรือ

$$U_i = \frac{w^2 L^5}{40EI}$$ ตอบ

ในกรณีนี้สามารถหาพลังงานความเครียดโดยใช้พิกัด x ที่มีจุดเริ่มต้นทางด้านขวามือของคาน ดังแสดงในรูป

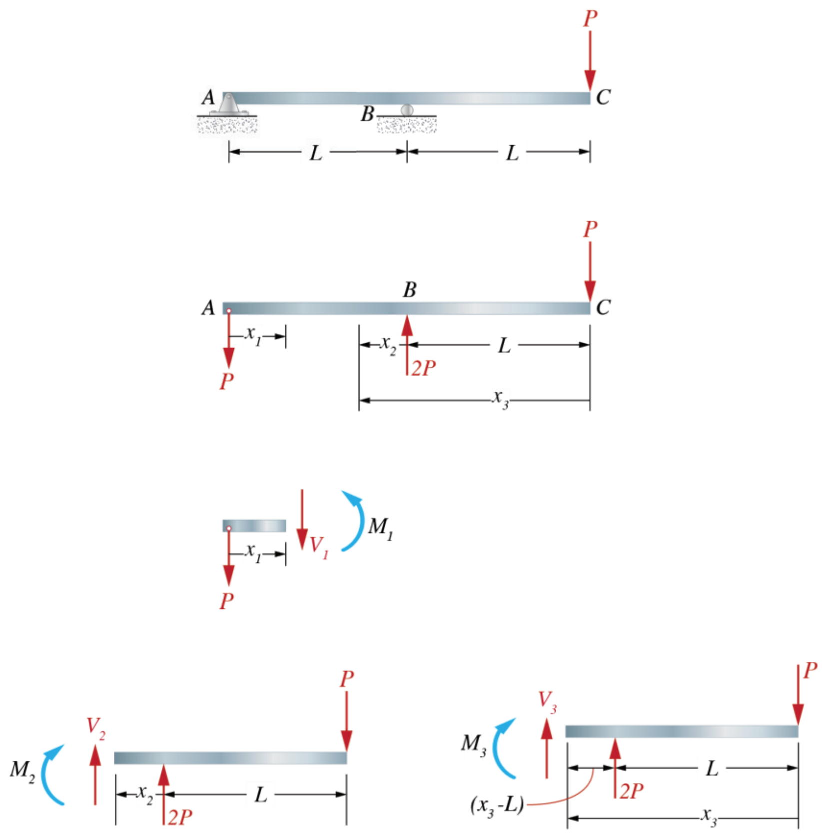
$$\curvearrowleft + \sum M_{NA} = 0; \qquad -M + wx\left(\frac{x}{2}\right) + wL(x) - \frac{wL^2}{2} = 0$$

$$M = \frac{-wL^2}{2} + wLx - w\left(\frac{w^2}{2}\right)$$

ประยุกต์ใช้สมการที่ 8-17 จะได้ผลลัพธ์เดียวกันกับคำตอบข้างต้น

ตัวอย่างที่ 8.3

จงคำนวณหาพลังงานความเครียดที่เกิดจากโมเมนต์ตัดในช่วง AB ของคานดังแสดงในรูป เมื่อ EI เป็นค่าคงที่



รูปตัวอย่างที่ 8.3

<u>วิธีทำ</u>

ผังวัตถุอิสระของคานดังแสดงในรูป สามารถแสดงโมเมนต์ดัดภายในรูปของพิกัด x แล้วประยุกต์ใช้สมการที่ 8-7 $0 \le x_1 \le L$ จากผังวัตถุอิสระของหน้าตัดดังแสดงในรูป จะได้ว่า

$$\circlearrowleft + \sum M_{NA} = 0; \qquad M + Px_1 = 0$$

$$M_1 = -Px_1$$

$$U_i = \int \frac{M^2 dx}{2EI} = \int_o^L \frac{(-Px_1)^2 dx_1}{2EI}$$

$$= \frac{P^2L^3}{6EI}$$ ตอบ

$0 \le x_2 \le L$ โดยใช้ผังวัตถุอิสระของหน้าตัด จะได้ว่า

$$\circlearrowleft + \sum M_{NA} = 0; \quad -M_2 + 2P(x_2) - P(x_2 + L) = 0$$

$$M_2 = P(x_2 - L)$$

$$U_i = \int \frac{M^2 dx}{2EI} = \int_o^L \frac{[P(x_2 - L)]^2 dx_2}{2EI}$$

$$= \frac{P^2L^3}{6EI}$$ ตอบ

$0 \le x_3 \le 2L$ จากผังวัตถุอิสระของหน้าตัดดังแสดงในรูป จะได้ว่า

$$\circlearrowleft + \sum M_{NA} = 0; \quad -M_3 + 2P(x_3 - L) - P(x_3) = 0$$

$$M_3 = P(x_3 - 2L)$$

$$U_i = \int \frac{M^2 dx}{2EI} = \int_L^{2L} \frac{[P(x_3 - 2L)]^2 dx_3}{2EI}$$

$$= \frac{P^2L^3}{6EI}$$ ตอบ

ตัวอย่างก่อนหน้านี้และตัวอย่างนี้ได้บ่งบอกว่าพลังงานความเครียดของคาน สามารถหาได้โดยใช้พิกัด x ที่เหมาะสมใดก็ได้และเป็นการอินทิเกรตบนช่วงของพิกัดที่พลังงานภายในทราบการเลือก x_1 ทำให้ได้คำตอบง่ายที่สุด

การเฉือนตามขวาง (transverse shear) พลังงานความเครียดเนื่องจากหน่วยแรงเฉือนในชิ้นส่วนของคาน สามารถหาได้โดยใช้สมการที่ 8-11 พิจารณาคานที่เป็นรูปสี่เหลี่ยมและมีแกนสมมาตร ดังแสดงในรูปที่ 8-9 ถ้าแรงเฉือนภายในตรงตำแหน่ง x คือ V แล้วหน่วยแรงเฉือนที่กระทำบนชิ้นส่วนเชิงปริมาตรของวัสดุที่มีความยาว dx และมีพื้นที่ dA คือ $\tau = VQ/It$ แทนค่าในสมการที่ 8-11 พลังงานความเครียดสำหรับการเฉือนจะกลายเป็น

$$U_i = \int_v \frac{\tau^2}{2G}\,dV = \int_v \frac{1}{2G}\left(\frac{VQ}{It}\right)^2 dA\,dx$$

หรือ

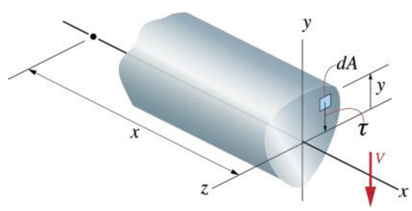
$$U_i = \int_o^L \frac{V^2}{2GI^2}\left(\int_A \frac{Q^2}{t^2}\,dA\right)dx$$

ทำการอินทิเกรตในวงเล็บครอบคลุมพื้นที่หน้าตัดของคานอย่างง่าย ค่านี้จะเรียกว่า แฟกเตอร์รูปทรงของหน้าตัด (Form Factor) สำหรับแรงเฉือน คือ

$$f_s = \frac{A}{I^2}\int_A \frac{Q^2}{t^2}\,dA \qquad (8\text{-}18)$$

แทนค่าในสมการข้างต้น จะได้ว่า

$$U_i = \int_o^L \frac{f_s V^2 dx}{2GA} \qquad (8\text{-}19)$$



รูปที่ 8-9 การหาพลังงานความเครียดสำหรับแรงเฉือนของคานที่เป็นรูปสี่เหลี่ยมและมีแกนสมมาตร

แฟกเตอร์รูปทรงของหน้าตัดที่นิยามไว้โดยสมการที่ 8-18 เป็นตัวเลขไร้มิติซึ่งเป็นค่าเฉพาะของแต่ละพื้นที่หน้าตัด ยกตัวอย่างเช่น ถ้าคานมีหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความกว้าง b และความสูง h ดังแสดงในรูปที่ 8-10 แล้ว

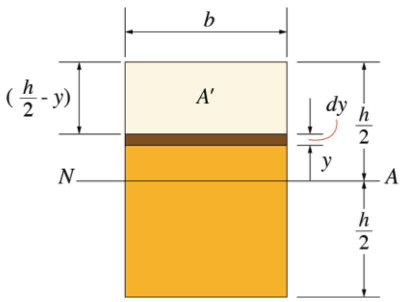
$$t = b, A = bh, I = \frac{1}{12}bh^3$$

$$Q = \overline{y}' A' = \left(y + \frac{(h/2) - y}{2}\right) b \left(\frac{h}{2} - y\right) = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

แทนค่าเทอมดังกล่าวนี้ในสมการที่ 8-10 จะได้ว่า

แฟกเตอร์รูปทรงของหน้าตัดสำหรับภาคตัดอื่นๆ สามารถหาได้ในทำนองเดียวกัน เมื่อทราบค่าเชิงตัวเลขจะทำการแทนค่าในสมการที่ 8-10 ก็สามารถคำนวณหาพลังงานความเครียดของการเฉือนตามขวางได้

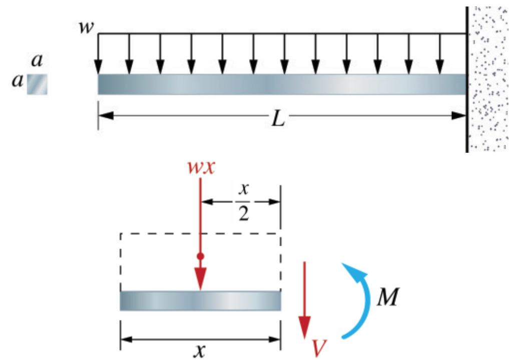
$$f_s = \frac{bh}{\left(\frac{1}{12}bh^3\right)^2} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{b^2}{4b^2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)^2 bdy = \frac{6}{5} \qquad (8\text{-}20)$$



รูปที่ 8-10 แฟกเตอร์รูปทรงของหน้าตัดคานมีหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความกว้าง b และความสูง h

<u>ตัวอย่างที่ 8.4</u>

จงคำนวณหาพลังงานความเครียดในคานยื่นเนื่องจากการเฉือน ถ้าคานถูกกระทำด้วยแรงกระทำแบบกระจายอย่างสม่ำเสมอ w ดังแสดงในรูป เมื่อ EI เป็นค่าคงที่และคานมีหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีด้านกว้างและด้านยาวเท่ากับ α



รูปตัวอย่างที่ 8.4

<u>วิธีทำ</u>

จากผังวัตถุอิสระของหน้าตัดที่กำหนดให้ ดังแสดงในรูป จะได้ว่า

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad -V - wx = 0$$

$$V = wx$$

เนื่องจากหน้าตัดเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส แฟกเตอร์รูปทรงของหน้าตัด (Form Factor) $f_s = \frac{6}{5}$ (จากสมการที่ 8-20) ดังนั้นสมการที่ 8-19 จะกลายเป็น

$$(U_i)_s = \int_o^L \frac{\frac{6}{5}(-wx)^2 dx}{2GA} = \frac{3w^2}{5GA}\int_o^L x^2 dx$$

หรือ

$$(U_i)_s = \frac{w^2L^3}{5GA}$$ ตอบ

โดยใช้ผลลัพธ์ของตัวอย่างที่ 8.2 เมื่อ $A = a^2$ และ $I = \frac{1}{12}a^4$ อัตราส่วนของการเฉือนต่อพลังงานความเครียดตัด คือ

$$\frac{(U_i)_s}{(U_i)_b} = \frac{w^2L^3/5Ga^2}{w^2L^5/40E\left(\frac{1}{12}a^4\right)} = \frac{2}{3}\left(\frac{a}{L}\right)^2 \frac{E}{G}$$

เนื่องจาก $G = E/2(1+\nu)$ และ $\nu \le \frac{1}{2}$ (จากหัวข้อความสัมพันธ์ของคุณสมบัติของวัสดุ) แล้วช่วงส่วนบน $E = 3G$ ดังนั้น

$$\frac{(U_i)_s}{(U_i)_b} = 2(\frac{a}{L})^2$$

พบว่าอัตราส่วนนี้เพิ่มขึ้นเมื่อค่าความยาว L ลดลง อย่างไรก็ตาม ถึงแม้ว่าคานจะสั้นมาก เช่น L = 5a การกระจายเนื่องจากพลังงานความเครียดเฉือนมีค่าเพียงร้อยละ 8 ของพลังงานความเครียดดัด ส่วนพลังงานความเครียดดัดและพลังงานความเครียดเฉือนที่ถูกเก็บสะสมในคาน ในที่นี้ไม่นำมาพิจารณาในการวิเคราะห์ทางวิศวกรรม เพราะมีค่าน้อยมาก

โมเมนต์บิด (torsional moment) เพื่อหาพลังงานความเครียดภายในเพลาหรือท่อรูปวงกลม เนื่องจากการกระทำของโมเมนต์บิด ประยุกต์ใช้สมการที่ 8-11 โดยพิจารณาเพลารูปปลายเรียวดังแสดงในรูปที่ 8-11 หน้าตัดของเพลาคิดที่ระยะ x วัดจากปลายด้านหนึ่งถูกกระทำด้วยโมเมนต์บิดภายใน T การกระจายหน่วยแรงทำให้โมเมนต์บิดนี้แปรค่าแบบเชิงเส้นจากจุดศูนย์กลางของเพลาบนชิ้นส่วนที่มีความยาว dx และมีพื้นที่ dA หน่วยแรงเฉือน คือ $\tau = T\rho / J$ พลังงานความเครียดที่ถูกเก็บสะสมไว้ในเพลาคือ

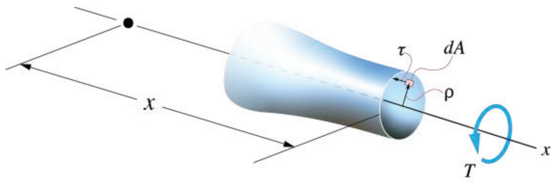
$$\begin{aligned} U_i &= \int_v \frac{\tau^2}{2G}\,dV = \int_v \frac{1}{2G}\left(\frac{T\rho}{J}\right)^2 dA\,dx \\ &= \int_o^L \frac{T^2}{2GJ^2}\left(\int_A \rho^2 dA\right)dx \end{aligned}$$

เนื่องจากการอินทิเกรตพื้นที่สามารถแทนได้โดยค่าโมเมนต์ของความเฉื่อยเชิงขั้ว J ผลลัพธ์สุดท้ายสามารถเขียนได้ว่า

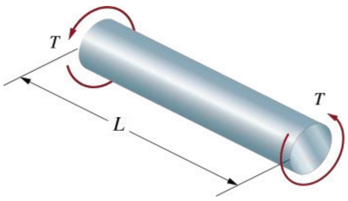
$$U_i = \int_o^L \frac{T^2}{2GJ}\,dx \qquad (8\text{-}21)$$

ในกรณีทั่วไปที่เกิดขึ้นเมื่อเพลา (หรือท่อ) มีพื้นที่หน้าตัดคงที่และโมเมนต์บิดที่กระทำมีค่าคงที่ดังแสดงในรูปที่ 8-12 ทำการอินทิเกรตสมการที่ 8-21 จะได้ว่า

$$U_i = \frac{T^2L}{2GJ} \qquad (8\text{-}22)$$



รูปที่ 8-11 เพลารูปปลายเรียวและโมเมนต์บิดที่กระทำ T



รูปที่ 8-12 เพลา (หรือท่อ) มีพื้นที่หน้าตัดคงที่และโมเมนต์บิดที่กระทำมีค่าคงที่

จากสมการนี้ สรุปได้ว่า คล้ายคลึงกันกับชิ้นส่วนรับแรงกระทำตามแนวแกนดังสมการที่ 8-3 ประสิทธิภาพการดูดซับพลังงานของเพลารับโมเมนต์บิดจะลดลง เมื่อมีการเพิ่มขึ้นของเส้นผ่านศูนย์กลางของเพลา เนื่องจากทำให้ค่า J เพิ่มขึ้น

ถ้าหน้าตัดของเพลามีรูปทรงนอกจากรูปวงกลมหรือรูปท่อดังในสมการที่ 8-22 จะต้องทำการดัดแปลงสมการดังกล่าว ยกตัวอย่างเช่น ถ้าเพลาเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีขนาด $h > b$ แล้วใช้การวิเคราะห์ทางคณิตศาสตร์บนพื้นฐานทางทฤษฎีของความยืดหยุ่นสามารถพิสูจน์ได้ว่าพลังงานความเครียดในเพลาหาได้จาก

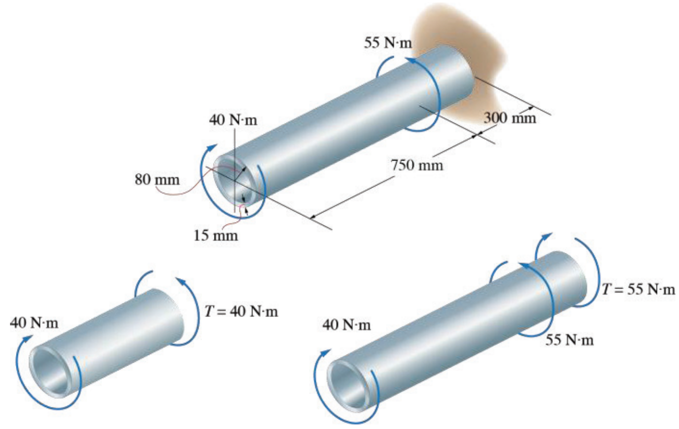
$$U_i = \frac{T^2 L}{2Cb^3 hG} \tag{8-23}$$

เมื่อ

$$C = \frac{hb^3}{16}\left[\frac{16}{3} - 3.336\frac{b}{h}\left(1 - \frac{b^4}{12h^4}\right)\right] \tag{8-24}$$

ตัวอย่างที่ 8.5

เพลาที่ทำเป็นรูปท่อดังแสดงในรูป ถูกยึดติดแน่นที่ผนังและถูกกระทำด้วยโมเมนต์บิด ทั้งสอง จงคำนวณหาพลังงานความเครียดที่เก็บสะสมในเพลาเนื่องจากแรงกระทำดังกล่าวนี้ เมื่อ G = 75 GPa



รูปตัวอย่างที่ 8.5

วิธีทำ

โดยใช้วิธีภาคตัด โมเมนต์บิดภายในเริ่มแรกหาภายในช่วงทั้งสองของเพลาที่มีค่าคงที่ดังแสดงในรูป ถึงแม้ว่าโมเมนต์บิดดังกล่าวนี้ (คือ 40 N.m และ 15 N.m) มีทิศทางตรงกันข้ามจะไม่นำมาใช้ในการคำนวณหาพลังงานความเครียดเนื่องจากโมเมนต์บิดยกกำลังสองในสมการที่ 8-22 หรือพูดอีกนัยหนึ่งว่า พลังงานความเครียดจะมีค่าเป็นบวกเสมอ โมเมนต์ของความเฉื่อยเชิงขั้วของเพลา คือ

$$J = \frac{\pi}{2}\left[(0.08\,\mathrm{m})^4 - (0.065)^4\right] = 36.3(10^{-6})\,\mathrm{m}^4$$

ประยุกต์ใช้สมการที่ 8-22 จะได้ว่า

$$U_i = \sum \frac{T^2L}{2GJ}$$

$$= \frac{(40\,\mathrm{N.m})^2(0.750\,\mathrm{m})}{2\left[75(10^9)\,\mathrm{N/m^2}\right]\left[36.3(10^{-6})\,\mathrm{m}^4\right]} + \frac{(15\,\mathrm{N.m})^2(0.300\,\mathrm{m})}{2\left[75(10^9)\,\mathrm{N/m^2}\right]\left[36.3(10^{-6})\,\mathrm{m}^4\right]}$$

$$= 233\ \mu\mathrm{J}$$ ตอบ

8.4 การอนุรักษ์พลังงาน

วิธีพลังงานทั้งหมดถูกนำมาใช้ในวิชากลศาสตร์บนพื้นฐานของสมการสมดุลของงานส่วนใหญ่จะอ้างอิงหลักการอนุรักษ์พลังงาน (conservation of energy) ในบทนี้มีเพียงพลังงานทางกลศาสตร์ซึ่งพิจารณาจากสมการสมดุลพลังงาน นั่นคือ พลังงานที่เกิดจากความร้อนพลังงานที่เกิดจากปฏิกิริยาเคมีและพลังงานที่เกิดจากแม่เหล็กไฟฟ้าจะไม่นำมาคิดในที่นี้เมื่อแรงกระทำกระทำต่อวัตถุอย่างช้า ดังนั้นพลังงานจลน์จึงไม่ถูกนำมาคิด และแรงกระทำภายนอกมีแนวโน้มที่จะทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของวัตถุ ดังนั้น แรงกระทำทำให้เกิดงานภายนอก (external work) U_e และท้ายที่สุดพลังงานภายนอกจะถูกเปลี่ยนแปลงไปเป็นพลังงานภายใน (internal work) หรือเรียกว่าพลังงานความเครียด (strain energy) U_i ที่เก็บสะสมในวัตถุ นอกจากนั้น เมื่อแรงกระทำถูกปลดออก พลังงานความเครียดจะทำให้วัตถุกลับคืนสู่ตำแหน่งที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างในตำแหน่งเดิม ถ้ายังเสียรูปเพราะเกินขีดจำกัดยืดหยุ่นของวัสดุ หลักการอนุรักษ์พลังงานสำหรับวัตถุสามารถกล่าวในเทอมคณิตศาสตร์ได้ คือ

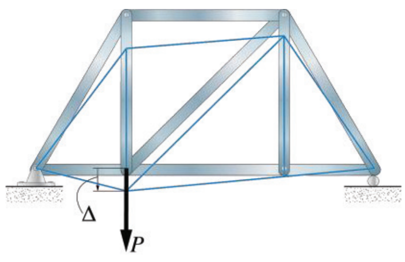
งานภายนอก = งานภายใน

$$U_e = U_i \tag{8-25}$$

สมการนี้สามารถประยุกต์ใช้เพื่อหาระยะการขจัดของจุดที่อยู่บนชิ้นส่วนหรือบนโครงสร้างที่มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง ดังตัวอย่างแรก ให้พิจารณาโครงถัก ดังแสดงในรูปที่ 8-13 ซึ่งถูกกระทำด้วยแรงกระทำที่ทราบค่าคือ P งานภายนอกที่กระทำโดย P หาได้จากสมการที่ 8-11 นั่นคือ เมื่อ $U_e = \frac{1}{2}P\Delta$ เมื่อ Δ เป็นระยะการขจัดในแนวดิ่งของโครงถักที่จุดที่ P กระทำ สมมุติว่า P ทำให้เกิดแรงตามแกน N ในชิ้นส่วนของโครงถัก พลังงานความเครียดที่เก็บสะสมในชิ้นส่วนหนึ่งหาได้จากสมการที่ 8-16 นั่นคือ $U_i = N^2L/2AE$ การรวมพลังงานความเครียดสำหรับชิ้นส่วนทั้งหมดของโครงถักสามารถเขียนสมการที่ 8-25 เป็น

$$\frac{1}{2}P\Delta = \sum \frac{N^2L}{2AE} \tag{8-26}$$

เมื่อทราบแรงภายในชิ้นส่วนทั้งหมดของโครงถักและเทอมด้านขวามือแล้ว จะสามารถหาระยะการขจัดที่ยังไม่ทราบค่า Δ ได้



รูปที่ 8-13 การประยุกต์วิธีการอนุรักษ์พลังงานกับโครงถัก

ตัวอย่างที่สอง พิจารณาการหาระยะการขจัดในแนวดิ่ง Δ ภายใต้แรงกระทำที่ทราบค่า P กระทำบนคานดังแสดงในรูปที่ 8-14 งานภายนอก คือ $U_e = \frac{1}{2}P\Delta$ อย่างไรก็ตามในกรณีนี้พลังงานความเครียดเป็นผลของแรงกระทำเนื่องจากการเฉือนและโมเมนต์ดัดภายในที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรง P กระทำ โดยเฉพาะอย่างยิ่งพลังงานความเครียดที่เกิดจากการเฉือนโดยทั่วไปไม่ถูกนำมาคิดในปัญหาที่ต้องการทราบค่าระยะการทรุดตัวของคาน เว้นเสียแต่คานมีลักษณะสั้นมากและรองรับแรงกระทำที่มีค่ามาก (ดูตัวอย่างที่ 8.4) ดังนั้น พลังงานความเครียดของคานหาได้จากโมเมนต์ดัดภายใน M โดยใช้สมการที่ 8-17 สมการที่ 8-25 สามารถเขียนในรูปสัญลักษณ์ คือ

$$\frac{1}{2}P\Delta = \int_o^L \frac{M^2}{2EI}dx \qquad (8\text{-}27)$$

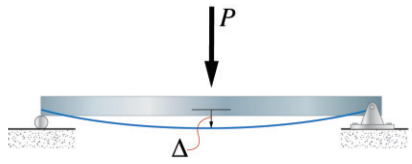
เมื่อ M เป็นฟังก์ชั่นของตำแหน่งและทำการอินทิเกรต จะสามารถหาค่าของ Δ ได้

สำหรับตัวอย่างสุดท้าย พิจารณาคานที่ถูกกระทำด้วยโมเมนต์คู่ควบ M_0 ดังแสดงในรูปที่ 8-15 โมเมนต์นี้ทำให้เกิดระยะการขจัดเชิงมุม θ ที่จุดที่โมเมนต์คู่ควบกระทำ เนื่องจากโมเมนต์คู่ควบทำให้เกิดงานเมื่อมีการหมุนโดยใช้สมการที่ 8-5 งานภายนอก คือ $U_e = \frac{1}{2}M_0\theta$ ดังนั้นสมการที่ 8-25 จะกลายเป็น

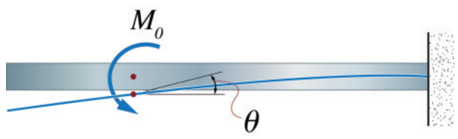
$$\frac{1}{2}M_0\theta = \int_o^L \frac{M^2}{2EI}dx \qquad (8\text{-}28)$$

พลังงานความเครียดหาได้จากผลของโมเมนต์ดัดภายใน M ที่เกิดโดยการกระทำของโมเมนต์คู่ควบ M_0 เมื่อ M เป็นฟังก์ชั่นของ x และเมื่อทราบพลังงานความเครียดแล้วจะสามารถหาค่าของ θ ได้

ในแต่ละตัวอย่างข้างต้น พบว่าการประยุกต์ใช้สมการที่ 8-25 ค่อนข้างมีข้อจำกัดเพราะว่ามีเพียงแรงภายนอกหรือโมเมนต์คู่ควบที่กระทำต่อชิ้นส่วนหรือโครงสร้าง พูดอีกนัยหนึ่งว่า ระยะการขจัดสามารถคำนวณหาได้ที่จุดใดๆ ของโครงสร้างในทิศทางของแรงภายนอกหรือโมเมนต์แรงคู่ควบกระทำ ถ้ามีแรงภายนอกหรือโมเมนต์คู่ควบมากกว่าหนึ่งแรงกระทำกับโครงสร้างแล้วงานภายนอกของแต่ละแรงกระทำจะมีความเกี่ยวข้องกันกับระยะการขจัดที่ยังไม่ทราบค่าที่มีความสอดคล้องกันเป็นผลให้ระยะการขจัดที่ยังไม่ทราบค่าดังกล่าวนี้ไม่สามารถคำนวณหาได้โดยใช้สมการที่ 8-25 เพียงสมการเดียวต้องใช้สมการอื่นร่วมด้วย



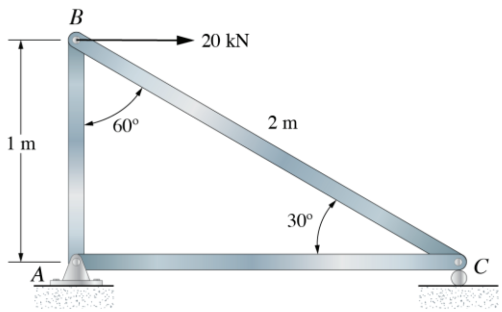
รูปที่ 8-14 การหาการโก่งตัวของคาน

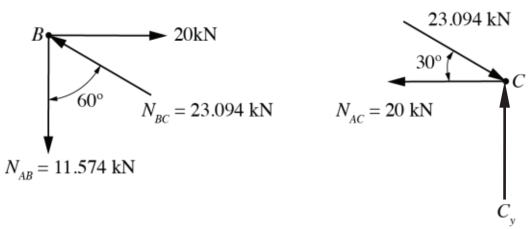


รูปที่ 8-15 การหามุมเอียง θ ของคาน

<u>ตัวอย่างที่ 8.6</u>

โครงถักทั้งสามดังแสดงในรูป ถูกกระทำด้วยแรงตามแนวราบ 20 kN ถ้าพื้นที่หน้าตัดของแต่ละชิ้นส่วน คือ 100 mm^2 จงคำนวณหาระยะการขจัดในแนวราบที่จุด B เมื่อ E = 200 GPa





รูปตัวอย่างที่ 8.6

<u>วิธีทำ</u>

สามารถประยุกต์ใช้วิธีของงานและพลังงานเนื่องจากมีเพียงแรงภายนอกกระทำต่อโครงถัก เพียงแรงเดียว และระยะการขจัดที่ต้องการหาอยู่ในทิศทางเดียวกันกับแรงกระทำ นอกจากนั้น แรงปฏิกิริยาบนโครงถักไม่มีงานเนื่องจากไม่เกิดระยะการขจัด

ใช้วิธีรอยต่อ แรงภายในแต่ละชิ้นส่วนสามารถหาได้บนผนังวัตถุอิสระของหมุดที่จุด B และ C ดังแสดงในรูป ประยุกต์ใช้สมการที่ 8-26 จะได้ว่า

$$\frac{1}{2}P\Delta = \sum \frac{N^2L}{2AE}$$

$$\frac{1}{2}20\times10^3\ N(\Delta_B)_h = \frac{(11.547\times10^3)^2(1\,m)}{2AE} + \frac{(-23.094\times10^3 N)^2(2\,m)}{2AE} + \frac{(+20\times10^3\ N)^2\ (1.732\,m)}{2AE}$$

$$(\Delta_B)_h = \frac{94640.0\,N.m}{AE}$$

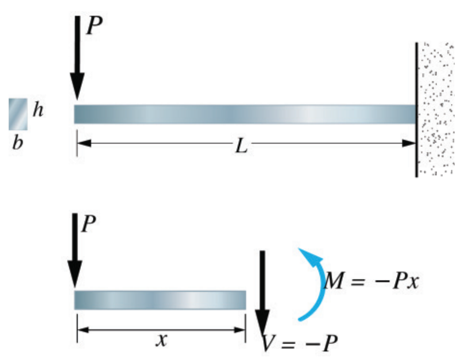
พบว่าเนื่องจาก N ยกกำลังสอง จึงไม่มีผลถึงแม้ว่าชิ้นส่วนจะอยู่ในสภาวะรับแรงดึงหรือแรงอัด แทนค่าข้อมูลในรูปของตัวเลขสำหรับค่า A และค่า E จะได้ว่า

$$(\Delta_B)_h = \frac{94640.0\,N.m}{(100\,mm^2)\left[1\ m/1000mm\right]^2\left[200\,(10^9\ N/m^2)\right]}$$

$$= 4.73\times10^{-3}\ m = 4.73\,mm \rightarrow \qquad \text{ตอบ}$$

<u>ตัวอย่างที่ 8.7</u>

คานยื่นดังแสดงในรูป มีหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า และถูกกระทำด้วยแรงกระทำ P ที่ปลายของคาน จงคำนวณหาระยะการขจัดของแรงกระทำ เมื่อ EI เป็นค่าคงที่



รูปตัวอย่างที่ 8.7

<u>วิธีทำ</u>

แรงเฉือนและโมเมนต์ภายในคานเป็นฟังก์ชั่นของ x ที่หาได้โดยวิธีภาคตัดดังแสดงในรูป เมื่อประยุกต์ใช้สมการที่ 8-25 จะพิจารณาพลังงานความเครียดเนื่องจากการเฉือนและการดัดโดยใช้สมการที่ 8-19 และสมการที่ 8-17 จะได้ว่า

$$\frac{1}{2}P\Delta = \int_0^L \frac{f_s V^2 dx}{2GA} + \int_0^L \frac{M^2 dx}{2EI}$$

$$= \int_0^L \frac{(\frac{6}{5})(-P)^2 dx}{2GA} + \int_0^L \frac{(-Px)^2 dx}{2EI} = \frac{3P^2L}{5GA} + \frac{P^2L^3}{6EI} \quad (1)$$

เทอมแรกทางด้านขวามือของสมการนี้แทนพลังงานความเครียดเนื่องจากการเฉือน ในขณะที่เทอมที่สองแทนพลังงานความเครียดอันเนื่องจากการดัด ดังได้กล่าวไว้ในตัวอย่างที่ 8.4 สำหรับคานพลังงานความเครียดที่เกิดจากการเฉือนมีน้อยกว่าพลังงานความเครียดที่เกิดจากการดัดโดยการเปรียบเทียบ จะได้ว่า

$$\frac{3P^2L}{5GA} \ll \frac{P^2L^3}{6EI}$$

$$\frac{3P^2L}{5G(bh)} \ll \frac{P^2L^3}{6E\left[\frac{1}{12}(bh^3)\right]}$$

$$\frac{3}{5G} \ll \frac{2L^2}{Eh^2}$$

เนื่องจาก $E \le 3G$ (ดูตัวอย่างที่ 8.4) แล้วจะได้ว่า

$$0.9 \ll \left(\frac{L}{h}\right)^2$$

ถ้า h มีค่าน้อยและ L มีค่ามาก (เมื่อเทียบกับ h) จะได้อัตราส่วนของ L/h มีค่ามากๆ ก็คือคานจะมีลักษณะเรียว พลังงานความเครียดที่เกิดจากการเฉือนไม่จำเป็นต้องนำมาพิจารณา หรือพูดอีกนัยหนึ่งว่า พลังงานความเครียดที่เกิดจากการเฉือนมีความสำคัญในคานสั้นและคานลึก ยกตัวอย่างเช่นคานที่มี L = 5h จะมีพลังงานความเครียดที่เกิดจากการดัดมากกว่าพลังงานความเครียดที่เกิดจากการเฉือน 28 เท่า ดังนั้น การไม่พิจารณาพลังงานความเครียดของการเฉือนจะเกิดความผิดพลาดเพียงประมาณร้อยละ 3.6 ทำให้สมการที่ (1) สามารถเขียนใหม่ดังแสดงในรูปอย่างง่ายเป็น

$$\frac{1}{2}P\Delta = \frac{P^2L^3}{6EI}$$

ดังนั้น

$$\Delta = \frac{PL^3}{3EI}$$ ตอบ

8.5 หลักการของงานเสมือน

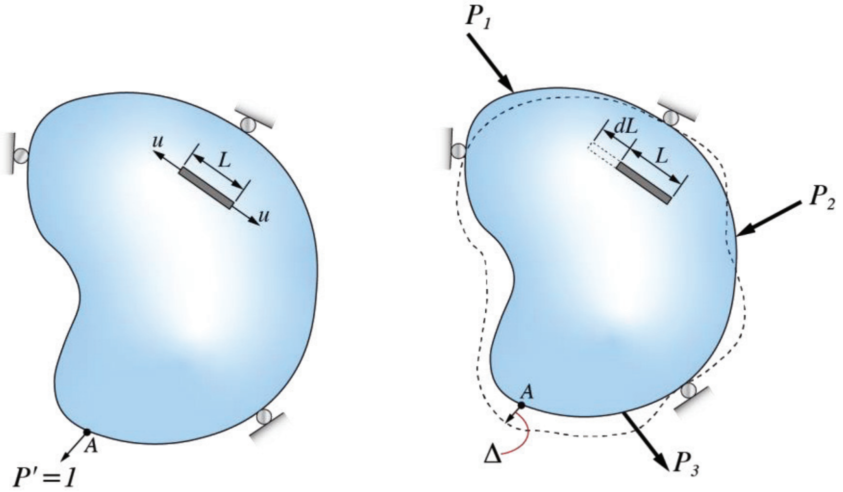
หลักการของงานเสมือน (principle of virtual work) ถูกพัฒนาขึ้นโดย จอร์น เบอร์นูลี่ (John Bernoulli ในปี ค.ศ. 1717) ซึ่งเหมือนกันกับวิธีพลังงานพื้นฐานจากหลักการอนุรักษ์พลังงาน และหลักการของงานเสมือนถูกนำมาใช้กันมากในกลศาสตร์ ในบทนี้จะใช้ในการหาระยะการขจัดและค่าความชันที่จุดต่างๆ บนวัตถุที่เปลี่ยนแปลงรูปร่าง

เมื่อใดก็ตาม วัตถุถูกยึดติดแน่นปราศจากการเคลื่อนที่ และเป็นไปตามเงื่อนไขของสมดุล และระยะการขจัดเป็นไปตามเงื่อนไขของความสอดคล้องกัน โดยเฉพาะอย่างยิ่ง เงื่อนไขของสมดุล (equilibrium conditions) ต้องการแรงกระทำภายนอกที่มีความสัมพันธ์กับแรงกระทำภายใน และเงื่อนไขของความสอดคล้องกัน (compatibility conditions) ต้องการระยะการขจัดภายนอกที่มีความสัมพันธ์กับการเปลี่ยนแปลงรูปร่างภายใน ยกตัวอย่างเช่น ถ้าพิจารณาวัตถุที่มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่มีรูปทรงหรือขนาดใดๆ และมีแรงกระทำภายนอก P กระทำต่อวัตถุ แรงกระทำดังกล่าวนี้จะทำให้เกิดแรงกระทำภายใน u ภายในวัตถุ แรงกระทำภายนอกและแรงภายในจะมีความสัมพันธ์กันโดยสมการของสมดุล นอกจากนั้น เนื่องจากวัตถุมีการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง แรงกระทำภายนอกเกิดระยะการขจัด Δ และแรงกระทำภายในมีระยะการขจัด δ โดยทั่วไปแล้ววัสดุไม่มีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่น และระยะการขจัดไม่มีความสัมพันธ์กันกับแรงกระทำ อย่างไรก็ตามถ้าทราบระยะการขจัดภายนอก ระยะการขจัดภายในที่สอดคล้องกันจะสามารถหาได้เนื่องจากวัตถุมีความต่อเนื่องกัน จากหลักการอนุรักษ์พลังงานกล่าวว่า

$$U_e = U_i; \qquad \Sigma P\Delta = \Sigma u\delta \tag{8-29}$$

จากพื้นฐานของหลักการนี้ได้นำไปสู่การพัฒนาหลักการของงานเสมือน ดังนั้น สามารถนำหลักการนี้มาใช้หาระยะการขจัดและค่าความชันที่จุดใดๆ บนวัตถุ พิจารณาวัตถุที่มีรูปทรงกำหนดในรูปที่ 8-14(ข) และถูกกระทำด้วยแรงกระทำจริง P_1 , P_2 และ P_3 เป็นที่เข้าใจได้ว่าแรงกระทำดังกล่าวนี้ไม่ทำให้ฐานรองรับเกิดการเคลื่อน อย่างไรก็ตาม โดยทั่วไปวัสดุจะเกิดความเครียดเกินขีดจำกัดของความยืดหยุ่น สมมุติว่าต้องการคำนวณหาระยะการขจัด Δ ของจุด A บนวัตถุที่เกิดจากแรงกระทำดังกล่าวนี้ พิจารณาโดยประยุกต์ใช้หลักการอนุรักษ์พลังงานดังสมการที่ 8-29 ในกรณีนี้ไม่มีแรงกระทำที่จุด A และยังไม่ทราบระยะการขจัด Δ ที่จุดดังกล่าวด้วย

จากข้อจำกัดนี้ จะวางแรงเสมือน P' บนวัตถุที่จุด A แรง P' จะกระทำในทิศทางเดียวกันกับระยะ Δ นอกจากนั้น แรงกระทำนี้กระทำต่อวัตถุก่อนที่แรงกระทำจริงจะกระทำดังแสดงในรูปที่ 8-14(ก) เพื่อความสะดวกจึงกำหนดให้แรง P' ที่มีขนาดหนึ่งหน่วย นั่นคือ $P' = 1$ เป็นแรงเสมือนที่เกิดขึ้นในจินตนาการและไม่มีจริงในแรงกระทำจริง แรงกระทำเสมือนภายนอกนี้ จะทำให้เกิดแรงกระทำเสมือนภายในคือ u ในชิ้นส่วนของวัตถุ ดังแสดงในรูปที่ 8-16(ก) ค่า P' และ u สามารถหาความสัมพันธ์กันได้โดยการใช้สมการของสมดุล นอกจากนั้น เนื่องจาก P' และ u ในวัตถุมีระยะการขจัดเสมือน



(ก) การประยุกต์ของ
น้ำหนักกระทำหนึ่งหน่วยงานเสมือน

(ข) การประยุกต์ของ
น้ำหนักกระทำจริง

รูปที่ 8-16 หลักการของงานเสมือน

ภายหลังจากแรงกระทำเสมือนกระทำที่วัตถุแล้ววัตถุถูกกระทำด้วยแรงกระทำจริง (Real Loads) P_1, P_2 และ P_3 ที่จุด A จะมีระยะการขจัดจริงคือ Δ ที่ทำให้ชิ้นส่วนเกิดระยะการขจัด dL ดังแสดงในรูปที่ 8-16(ข) เป็นผลทำให้แรงเสมือนภายนอก P' และแรงกระทำเสมือนภายใน u เกิดค่า Δ และ dL ตามลำดับ ดังนั้น แรงกระทำดังกล่าวนี้จะทำให้เกิดงานเสมือนภายนอก (External Virtual Work) คือ $1.\Delta$ บนวัตถุและเกิดงานเสมือนภายใน (Internal Virtual Work) u.dL บนชิ้นส่วน พิจารณาโดยใช้หลักการอนุรักษ์พลังงานเสมือน งานเสมือนภายนอกมีค่าเท่ากับงานเสมือนภายในทำบนชิ้นส่วนของวัตถุทั้งหมด ดังนั้น สามารถเขียนสมการของงานเสมือนเป็น

แรงกระทำเสมือน

$$1\cdot\Delta = \sum u \cdot dL \qquad (8\text{-}30)$$

ระยะการขจัดจริง

เมื่อ

P' = 1 = แรงเสมือนภายนอกที่กระทำในทิศทางเดียวกันกับ Δ และมีขนาดหนึ่งหน่วย

u = แรงกระทำเสมือนภายในที่กระทำต่อชิ้นส่วน

Δ = ระยะการขจัดภายนอกเกิดจากแรงกระทำจริง

dL = ระยะการขจัดภายในของชิ้นส่วนในทิศทางเดียวกันกับ u เกิดจากแรงกระทำจริง

โดยกำหนดให้ P' = 1 หน่วย พบว่าคำตอบของ Δ หาได้โดยตรง เนื่องจาก $\Delta = \Sigma u \cdot dL$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าระยะการขจัดเชิงมุมหรือค่าความชันของแนวเส้นสัมผัสที่จุดใดๆ บนวัตถุหาได้ โดยใช้โมเมนต์คู่ควบเสมือน (virtual couple moment) M' ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยกระทำที่จุดที่ต้องการคำนวณ โมเมนต์คู่ควบเสมือนนี้จะทำให้เกิดแรงกระทำเสมือนภายใน u_θ เกิดขึ้นที่ชิ้นส่วนของวัตถุ สมมุติว่าแรงกระทำจริงเปลี่ยนแปลงรูปร่างชิ้นส่วนเชิงเส้นไป dL และเกิดการหมุนไปเป็นมุม θ สามารถหาค่าดังกล่าวได้จากสมการของงานเสมือน

$$\overbrace{1 \cdot \theta = \sum u_\theta}^{\text{แรงกระทำเสมือน}} \cdot \underbrace{dL}_{\text{ระยะการขจัดจริง}} \qquad (8\text{-}31)$$

เมื่อ

M' = 1 เรเดียน = โมเมนต์คู่ควบเสมือนขนาดหนึ่งหน่วยที่กระทำในทิศทางเดียวกันกับมุม θ

u_θ = แรงกระทำเสมือนภายในของชิ้นส่วน

θ = ระยะการขจัดเชิงมุมในหน่วยเรเดียนเกิดจากแรงกระทำจริง

dL = ระยะการขจัดภายในของชิ้นส่วนในทิศทางของ u_θ เกิดจากแรงกระทำจริง

วิธีการนี้ถูกเรียกว่าเป็นวิธีของแรงเสมือน (method of virtual forces) เนื่องจากแรงเสมือนทำให้ได้คำตอบเป็นระยะการขจัดจริงภายนอก (external real displacement) สมการของงานเสมือนในกรณีนี้มีความสอดคล้องกันของการเปลี่ยนรูปร่างด้วย (compatibility requirements) พึงระลึกเสมอว่า สามารถประยุกต์ใช้หลักการของงานเสมือนได้และเรียกวิธีดังกล่าวว่าวิธีระยะการขจัดเสมือน (method of virtual displacements) ในกรณีนี้ การคำนวณหาระยะการขจัดเสมือน (virtual displacements) ที่เกิดขึ้นบนวัตถุเมื่อวัตถุถูกกระทำด้วยแรงกระทำจริง (real loadings) วิธีนี้สามารถใช้หาแรงทั้งแรงภายนอกและภายใน

งานเสมือนภายใน (internal virtual work) เทอมด้านขวามือของสมการที่ 8-30 และ 8-31 แทนงานเสมือนภายในที่เกิดในวัตถุ ระยะการขจัดภายในจริง dL ในเทอมดังกล่าวนี้สามารถเกิดขึ้นจากหลายกรณี ยกตัวอย่างเช่น ระยะการขจัดดังกล่าวนี้เป็นผลจากความผิดพลาดในการประกอบโครงสร้างเชิงเรขาคณิต เกิดจากอุณหภูมิหรือจากหน่วยแรง ดังนั้นหน่วยแรงอาจมีค่ามากเพียงพอที่จะทำให้เกิดการครากหรือการแข็งตัวที่เกิดจากความเครียดของวัสดุ

ถ้าสมมุติว่าพฤติกรรมวัสดุเป็นแบบยืดหยุ่นเชิงเส้นและค่าหน่วยแรงไม่เกินขีดจำกัดของสัดส่วน สามารถสร้างรูปสมการของงานเสมือนภายในที่เกิดจากหน่วยแรงโดยใช้สมการของพลังงานความเครียดแบบยืดหยุ่นที่พัฒนาในหัวข้อที่ 8.2 และได้แสดงไว้ในแถวกลางของตารางที่ 8.1 พึงระลึกเสมอว่า สมมุติว่าค่าของหน่วยแรงนั้นเกิดจาก N, V, M หรือ T งานที่ทำโดยผลลัพธ์หน่วยแรงนี้ เป็นครึ่งหนึ่งของผลคูณของหน่วยแรงลัพธ์และระยะการขจัดในวิธีงานเสมือน อย่างไรก็ตาม แรงกระทำเสมือนที่กระทำก่อนแรงกระทำจริงทำให้เกิดระยะการขจัดและงานของแรงกระทำเสมือนภายใน ซึ่งเป็นผลคูณของแรงกระทำเสมือนภายในและระยะการขจัดจริง อ้างถึงแรงกระทำเสมือนภายในดังกล่าวนี้ (u) โดยสัญลักษณ์ที่สอดคล้องกันคือ n, v, m และ t คืองานเสมือนเนื่องจากแรงกระทำตามแนวแกน แรงเฉือน โมเมนต์ดัดและโมเมนต์บิด ดังแสดงในแถวด้านขวามือของตารางที่ 8.1 โดยใช้ผลลัพธ์ดังกล่าวนี้ สมการของงานเสมือนสำหรับวัตถุที่ถูกกระทำด้วยแรงกระทำแบบทั่วไป สามารถเขียนได้ในรูปของสมการ

$$1.\Delta = \int \frac{nN}{AE}dx + \int \frac{mM}{EI}dx + \int \frac{f_s vV}{GA}dx + \int \frac{tT}{GJ}dx \qquad (8\text{-}32)$$

ตารางที่ 8.1 งานเสมือนภายในที่เกิดจากหน่วยแรงโดยใช้สมการของพลังงานความเครียดแบบยืดหยุ่น

การเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่เกิดโดย	พลังความเครียด	งานเสมือนภายใน
แรงกระทำตามแนวแกน N	$\int_0^L \frac{N^2}{2EA}dx$	$\int_0^L \frac{nN}{EA}dx$
แรงเฉือน V	$\int_0^L \frac{f_s V^2}{2GA}dx$	$\int_0^L \frac{f_s vV}{GA}dx$
โมเมนต์ดัด M	$\int_0^L \frac{M^2}{2EI}dx$	$\int_0^L \frac{mM}{EI}dx$
โมเมนต์บิด T	$\int_0^L \frac{T^2}{2GJ}dx$	$\int_0^L \frac{tT}{GJ}dx$

ในหัวข้อต่อไปนี้จะได้แสดงวิธีการประยุกต์ใช้สมการข้างต้นในการแก้ปัญหาเพื่อคำนวณหาระยะการทรุดตัวของโครงถัก คาน และชิ้นส่วนทางกลศาสตร์ รวมทั้งกล่าวถึงวิธีจัดการผลของความผิดพลาดที่เกิดขึ้นในการประกอบชิ้นส่วนของโครงสร้างและผลของอุณหภูมิที่แตกต่างกัน ในการประยุกต์ใช้มีความสำคัญมากที่ใช้ชุดหน่วยเป็นชุดเดียวกันสำหรับทุกเทอม ยกตัวอย่างเช่น ถ้าแรงกระทำจริงแสดงในรูปหน่วยกิโลนิวตันและขนาดของวัตถุแสดงในหน่วยเป็นเมตร แรงเสมือนจะต้องมีหน่วยเป็น 1 kN หรือโมเมนต์คู่ควบเสมือนต้องมีหน่วยเป็น 1 kN.m ดังนั้น ระยะการขจัด Δ จึงมีหน่วยเป็นเมตรและค่าความชันมีหน่วยเรเดียน (ค่าความชันมีหน่วยเป็นเรเดียนเสมอ)

8.6 การประยุกต์ใช้วิธีแรงเสมือนกับโครงถัก

ในหัวข้อนี้จะได้แสดงการประยุกต์วิธีแรงเสมือนในการหาระยะการขจัดที่จุดต่อของโครงถัก (method of virtual forces applied to trusses) ระยะการขจัดในแนวดิ่งของจุดต่อที่จุด A ของโครงถักดังแสดงในรูปที่ 8-17(ข) เกิดจากแรงกระทำจริง P_1 และ P_2 เนื่องจากแรงกระทำดังกล่าวนี้ทำให้เกิดเพียงแรงตามแกนในชิ้นส่วนจึงจำเป็นต้องพิจารณางานเสมือนภายในที่เกิดเนื่องจากแรงกระทำตามแนวแกนเท่านั้นในตารางที่ 8.1 เพื่อให้ได้งานเสมือนนี้ ให้สมมุติว่าแต่ละชิ้นส่วนมีพื้นที่หน้าตัดคงที่เท่ากัน A และแรงกระทำเสมือนตามแนวแกนคือ n และแรงกระทำจริง N มีค่าคงที่ตลอดความยาวของชิ้นส่วนเป็นผลให้ งานเสมือนภายในของชิ้นส่วน คือ

$$\int_0^L \frac{nN}{AE}dx = \frac{nNL}{AE}$$

และสมการงานเสมือนของโครงถักทั้งหมด คือ

$$1.\Delta = \sum \frac{nNL}{AE} \qquad (8\text{-}33)$$

เมื่อ

L = แรงเสมือนภายนอกมีขนาดหนึ่งหน่วยและกระทำที่จุดต่อของโครงถักในทิศทางเดียวกันกับ Δ

Δ = ระยะการขจัดจริงที่จุดต่อเกิดจากแรงกระทำจริงบนโครงถัก

n = แรงเสมือนภายในชิ้นส่วนโครงถักเกิดจากแรงเสมือนภายนอก

N = แรงภายในชิ้นส่วนของโครงถักที่เกิดจากแรงกระทำจริง

L = ความยาวของชิ้นส่วน

A = พื้นที่หน้าตัดของชิ้นส่วน

E = โมดูลัสของความยืดหยุ่นของชิ้นส่วน

รูปแบบสมการนี้เป็นไปตามสมการที่พัฒนาในหัวข้อที่ 8-4 แรงกระทำเสมือนหนึ่งหน่วยภายนอก ทำให้เกิดแรงเสมือนภายในคือ n ในแต่ละชิ้นส่วนของโครงถักดังแสดงในรูปที่ 8-17(ก) เมื่อแรงกระทำจริงกระทำต่อของโครงถัก ทำให้จุดต่อโครงถักเกิดระยะการขจัด Δ ในทิศทางเดียวกันกับแรงกระทำเสมือนหนึ่งหน่วยดังแสดงในรูปที่ 8-17(ข) และแต่ละชิ้นส่วนทำให้เกิดระยะการขจัด NL/AE ในทิศทางเดียวกันกับแรงภายใน n ของชิ้นส่วนตามลำดับ ดังนั้น งานเสมือนภายนอก $1.\Delta$ จึงมีค่าเท่ากันกับงานเสมือนภายในหรือพลังงานความเครียด (เสมือน) ที่เก็บสะสมในชิ้นส่วนของโครงถักทั้งหมด นั่นคือ สมการที่ 8-33

การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ (temperature change) ชิ้นส่วนของโครงถักสามารถเปลี่ยนแปลงความยาวได้ เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ ถ้า α คือค่าสัมประสิทธิ์ของการขยายตัวเชิง ความร้อนสำหรับชิ้นส่วน และ ΔT เป็นการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ ระยะการเปลี่ยนแปลงความยาวของชิ้นส่วน คือ $\Delta L = \alpha \Delta TL$ สามารถหาระยะการขจัดของจุดต่อของโครงถักที่ต้องการอันเนื่องมาจากการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิจากสมการที่ 8-33 เขียนได้เป็น

$$1.\Delta = \sum n\alpha\Delta TL \qquad (8\text{-}34)$$

เมื่อ

L = แรงเสมือนขนาดหนึ่งหน่วยกระทำต่อจุดต่อของโครงถักในทิศทางเดียวกันกับ Δ

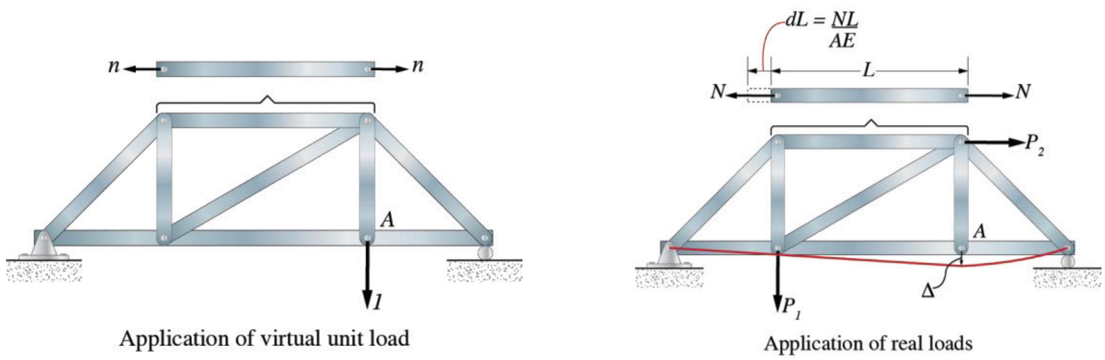
n = แรงเสมือนภายในชิ้นส่วนโครงถักเกิดจากแรงกระทำเสมือนภายนอกขนาดหนึ่งหน่วย

Δ = ระยะการขจัดของจุดต่อภายนอกที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ

α = สัมประสิทธิ์ของการขยายตัวเชิงความร้อนของชิ้นส่วน

ΔT = การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของชิ้นส่วน

L = ความยาวของชิ้นส่วน



(ก) (ข)

รูปที่ 8-17 การพิจารณาแรงเสมือนและแรงจริงของโครงถัก

ความผิดพลาดในการประกอบ (fabrication errors) ในบางครั้งความผิดพลาดในการประกอบชิ้นส่วนของโครงสร้าง เนื่องจากความยาวของชิ้นส่วนของโครงถักที่ทำการผลิตมีการผลิตที่ผิดขนาดไปเล็กน้อย ระยะการขจัดในทิศทางที่ต้องการของจุดต่อของโครงถักจากตำแหน่งที่คาดไว้สามารถหาได้จากการประยุกต์ใช้สมการที่ 8-30 เขียนได้ในรูปของ

$$1.\Delta = \sum n\Delta L \tag{8-35}$$

เมื่อ

- L = แรงเสมือนกระทำหนึ่งหน่วยเป็นทรงภายนอกที่กระทำที่จุดต่อของโครงสร้างในทิศทางเดียวกันกับ Δ
- n = แรงเสมือนภายในชิ้นส่วนโครงถักเกิดจากแรงเสมือนภายนอกหนึ่งหน่วย
- Δ = ระยะการขจัดของจุดต่อเกิดจากความผิดพลาดในการประกอบ
- ΔL = ความแตกต่างของความยาวของชิ้นส่วนจากความยาวเดิมที่เกิดจากความผิดพลาดในการประกอบ

การรวมกันของเทอมทางด้านขวามือของสมการที่ 8-33 ถึง 8-35 เกิดจากแรงกระทำภายนอกที่กระทำต่อโครงถักและบางชิ้นส่วนมีการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิหรือมีการประกอบผิดพลาด

วิธีการสำหรับวิเคราะห์ (procedure for analysis)

ขั้นตอนนี้จะกล่าวถึงวิธีที่ใช้หาระยะการขจัดของจุดต่อบนโครงถักโดยใช้วิธีของแรงเสมือน

แรงเสมือน n (virtual forces, n) วางแรงเสมือนหนึ่งหน่วยบนจุดต่อโครงถักที่ต้องการทราบระยะการขจัด แรงกระทำควรมีทิศทางเดียวกันกับระยะการขจัดที่ต้องการ ยกตัวอย่างเช่น ถ้าต้องการทราบระยะการขจัดในแนวดิ่ง แรงกระทำหนึ่งหน่วยควรกระทำในแนวดิ่ง เมื่อแรงกระทำหนึ่งหน่วยถูกวางบนโครงถัก จะต้องไม่มีแรงกระทำภายนอกกระทำต่อโครงสร้างแล้วทำการคำนวณหาแรงภายใน n ของแต่ละชิ้นส่วนของโครงถัก ให้สมมุติว่าแรงดึงมีค่าเป็นบวกและแรงอัดมีค่าเป็นลบ

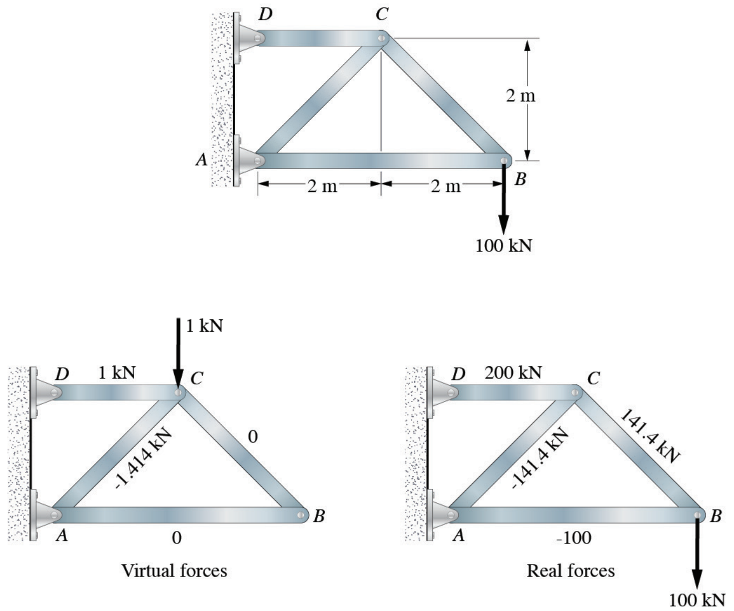
แรงจริง N (real forces, N) การหาแรงจริงภายใน N ของแต่ละชิ้นส่วน แรงดังกล่าวนี้เกิดจากแรงกระทำจริงที่กระทำต่อโครงถัก ให้สมมุติว่าแรงดึงมีค่าเป็นบวกและแรงอัดมีค่าเป็นลบ เนื่องจากงานเสมือนภายในที่มีค่าเป็นบวกหรือลบขึ้นอยู่กับทิศทางของแรงกระทำเสมือน

สมการงานเสมือน (virtual-work equation) ประยุกต์ใช้สมการของงานเสมือน สมการที่ 8-33 เพื่อคำนวณหาระยะการขจัดที่ต้องการคือ Δ ใช้เครื่องหมายทางพีชคณิตสำหรับแต่ละแรง n และ N เมื่อแทนค่าเทอมดังกล่าวนี้ในสมการ ถ้าผลรวมของแรงลัพธ์คือ $\sum nNL/AE$ มีค่าเป็นบวก ระยะการขจัด Δ จะอยู่ในทิศทางเดียวกันกับแรงเสมือนหนึ่งหน่วย ถ้าผลลัพธ์มีค่าเป็นลบ ระยะการขจัด Δ มีทิศทางตรงกันข้ามกับแรงเสมือนหนึ่งหน่วย

ในทำนองเดียวกัน เมื่อประยุกต์ใช้สมการที่ 8-34 พึงตระหนักว่า ถ้าชิ้นส่วนใดๆ มีอุณหภูมิเพิ่มขึ้นค่า ΔT จะมีค่าเป็นบวก ในขณะที่ถ้ามีการลดลงของอุณหภูมิของ ΔT จะมีค่าเป็นลบซึ่งมีความหมายคล้ายกันกับสมการที่ 8-35 เมื่อความผิดพลาดในการประกอบ ΔL มีค่าเป็นบวก แสดงว่าชิ้นส่วนมีความยาวเพิ่มขึ้น ในขณะที่การลดลงในความยาวค่า ΔL จะมีค่าเป็นลบ

<u>ตัวอย่างที่ 8.8</u>

จงคำนวณหาระยะการขจัดในแรงดิ่งของจุด C ของโครงถักเหล็กแสดงดังแสดงในรูป พื้นที่หน้าตัดของแต่ละชิ้นส่วน คือ A = 400 mm^2 E_{st} = 200 GPa



รูปตัวอย่างที่ 8.8

<u>วิธีทำ</u>

แรงเสมือน n (virtual forces, n) มีเพียงแรงกระทำเสมือนในแนวดิ่งขนาด 1 kN กระทำที่จุด C และแรงในแต่ละชิ้นส่วนถูกคำนวณได้โดยใช้วิธีจุดต่อ (Method of Joint) ผลลัพธ์ของการวิเคราะห์นี้ได้แสดงไว้ในรูป โดยใช้สัญลักษณ์ของเครื่องหมาย ค่าบวกบ่งบอกว่าเป็นแรงดึงและค่าลบบ่งบอกว่าเป็นแรงอัด

แรงจริง N (real forces, N) แรงกระทำขนาด 100 kN ทำให้เกิดแรงภายในชิ้นส่วนที่คำนวณโดยใช้วิธีจุดต่อ ผลลัพธ์ดังแสดงในรูป

สมการงานเสมือน (virtual-work equation) จัดเรียงข้อมูลลงในตาราง จะได้ว่า

ชิ้นส่วน	n	N	L	nNL
AB	0	-100	4	0
BC	0	141.4	2.828	0
AC	-1.414	-141.4	2.828	565.7
CD	1	200	2	400
				$\sum 965.7\,\mathrm{kN}^2 \cdot \mathrm{m}$

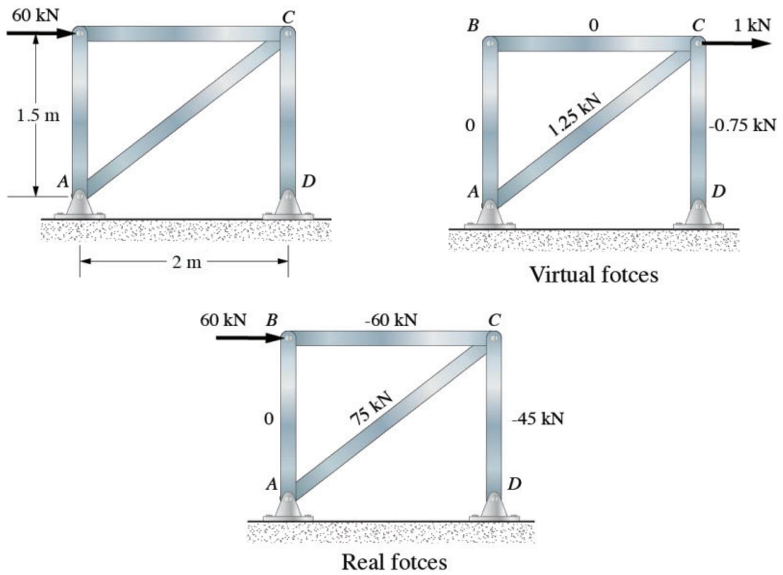
ดังนั้น แทนค่าตัวเลขของ A และ E จะได้ว่า

$$1\ \mathrm{kN}.\Delta_{Cv} = \frac{965.7\,\mathrm{kN}.^2\mathrm{m}}{\left[400(10^{-6})\,\mathrm{m}^2\right]\left[200(10^{6})\,\mathrm{kN/m}^2\right]}$$

$$\Delta_{Cv} = 0.01207\,\mathrm{m} = 12.1\ \mathrm{mm}$$ ตอบ

<u>ตัวอย่างที่ 8.9</u>

พื้นที่หน้าตัดของแต่ละชิ้นส่วนของโครงถักที่ทำจากเหล็กดังแสดงในรูป คือ A = 300 mm ^{2} โมดูลัสของความยืดหยุ่นสำหรับชิ้นส่วนเหล็ก คือ E_{st} = 210 GPa (ก) จงคำนวณหาระยะการขจัดในแนวราบของจุด C ถ้าแรง 60 kN กระทำต่อโครงถักที่จุด B (ข) ถ้ายังไม่มีแรงกระทำภายนอกกระทำบนโครงถัก จงคำนวณหาค่าระยะการขจัดในแนวราบของจุด C ถ้าชิ้นส่วน AC ที่ประกอบมีความยาวที่สั้นกว่าความยาวจริงในแบบอยู่ 6 mm



รูปตัวอย่างที่ 8.9

<u>วิธีทำ</u>

(ก)

แรงเสมือน n (virtual forces, n) เนื่องจากต้องการทราบว่าค่าระยะการขจัดในแนวราบของจุด C ดังนั้น แรงเสมือนในแนวราบขนาด 1 kN จึงต้องกระทำที่จุด C แรง n ในแต่ละชิ้นส่วน สามารถหาโดยวิธีรอยต่อและแสดงค่าดังกล่าวบนโครงถักดังแสดงในรูป โดยปกติตัวเลขที่มีค่าบวกจะแทนแรงดึงและตัวเลขที่มีค่าลบจะแทนแรงอัด

แรงจริง N (real forces, N) แรงจริงในแต่ละชิ้นส่วนที่เกิดจากแรงกระทำภายนอก 60 kN ดังแสดงในรูป

สมการงานเสมือน (virtual-work equation) เนื่องจาก AE เป็นค่าคงที่ $\sum \mathrm{nNL}$ คำนวณได้ดังนี้

ชิ้นส่วน	n	N	L	nNL
AB	0	0	1.5	0
AC	1.25	75	2.5	234.375
CB	0	-60	2	0
CD	-0.75	-45	1.5	50.625
				$\sum 285(\mathrm{kN})^2.\mathrm{m}$

$$1\ \mathrm{kN}.\Delta_{Ch} = \sum \frac{\mathrm{nNL}}{\mathrm{AE}} = \frac{285(\mathrm{kN})^2.\ \mathrm{m}}{\mathrm{AE}}$$

$$1\ \mathrm{kN}.\Delta_{Ch} = \frac{285(\mathrm{kN})^2.\ \mathrm{m}\ (1000\ \mathrm{mm/m})}{(300\ \mathrm{mm}^2)210(10^6)\mathrm{kN/m}^2(1\ \mathrm{m}/1000\ \mathrm{mm})^2}$$

$$\Delta_{Ch} = 4.524\ \mathrm{mm}$$ ตอบ

(ข)

ประยุกต์ใช้สมการที่ 8-35 เพื่อหาระยะการขจัดในแนวราบที่จุด C สามารถใช้ผลลัพธ์ของรูปที่ และเนื่องจากชิ้นส่วน AC สั้นกว่าความยาวจริงในแบบ ดังนั้น $\Delta L = -0.25$ in จะได้ว่า

$$1.\Delta = \sum u\Delta L;$$

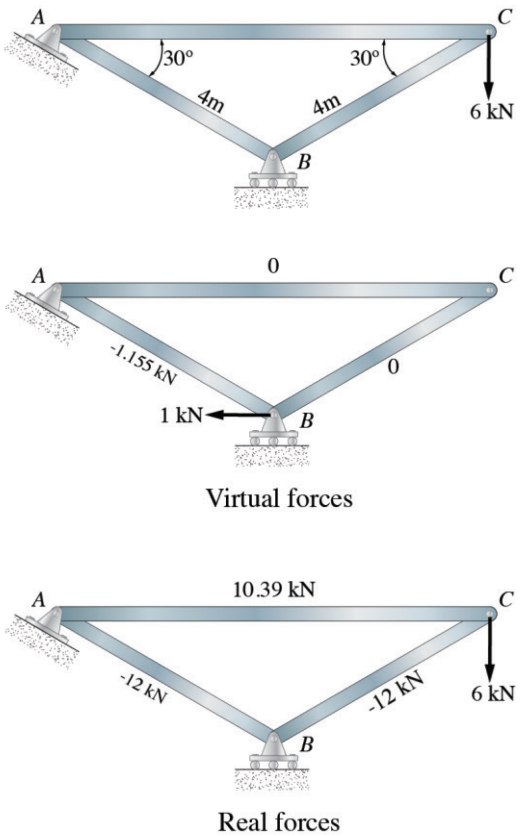
$$1\ \mathrm{kN}.\Delta_{Ch} = (1.25\ \ \mathrm{kN})(-6\,\mathrm{mm})$$

$$\Delta_{Ch} = 75\,\mathrm{mm} = 7.5\,\mathrm{mm} \leftarrow$$ ตอบ

เครื่องหมายลบจะบ่งบอกว่าจุดต่อ C มีระยะขจัดไปทางด้านซ้ายมือ ซึ่งมีทิศทางตรงกันข้ามกับแรงกระทำในแนวราบ 1 kN

ตัวอย่างที่ 8.10

จงคำนวณหาระยะการขจัดในแนวราบของจุดต่อ B ของโครงถักดังแสดงในรูป เนื่องจากการกระจายความร้อนชิ้นส่วน AB ถูกกระทำด้วยอุณหภูมิที่เพิ่มขึ้น $\Delta T = +60^{\circ}\mathrm{C}$ ชิ้นส่วนทำจากเหล็กที่มี $\alpha_{st} = 12\left(10^{-6}\right)/^{\circ}\mathrm{C}$ และ $E_{st} = 200\ \mathrm{GPa}$ พื้นที่หน้าตัดของแต่ละชิ้นส่วน คือ $250\ \mathrm{mm}^2$



รูปตัวอย่างที่ 8.10

วิธีทำ

แรงเสมือน n (virtual forces, n) แรงกระทำเสมือนกระทำในแนวราบด้วยขนาด 1 kN กระทำในโครงถักที่จุดต่อ B และแรงภายในแต่ละชิ้นส่วนคำนวณได้ดังแสดงในรูป

แรงจริง N (real forces, N) เนื่องจากแรง n ภายในในชิ้นส่วน AC และ BC มีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้น แรง N ในชิ้นส่วนดังกล่าวนี้จึงไม่ถูกนำมาคำนวณ การวิเคราะห์แรงจริงทั้งหมดได้แสดงในรูป

สมการงานเสมือน (virtual-work equation) แรงกระทำและอุณหภูมิมีผลกระทบต่อการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของโครงถัก ดังนั้น สมการที่ 8-33 และ 8-34 จึงต้องนำมาใช้รวมกัน จะได้ว่า

$$1\ \text{kN}\cdot\Delta_{Bh} = \sum\frac{nNL}{AE}+\sum u\alpha\Delta TL$$

$$= 0+0+\frac{(-1.155\,\text{kN})(-12\,\text{kN})(4\,\text{m})}{[250(10^{-6})\,\text{m}^3][200(10^6)\,\text{kN/m}^2]}$$

$$+0+0+(-1.155\,\text{kN})[12(10^{-6})/^\circ\text{C}](60^\circ\text{C})(4\,\text{m})$$

$$\Delta_{Bh} = -0.00222\ \text{m}$$

$$= 2.22\ \text{mm}\rightarrow$$ ตอบ

เครื่องหมายที่เป็นลบบ่งบอกว่าล้อเลื่อน B เคลื่อนที่ไปทางขวามือ ซึ่งตรงกันข้ามกับทิศทางของแรงกระทำเสมือนดังแสดงในรูป

8.7 การประยุกต์ใช้วิธีแรงเสมือนกับคาน

ในหัวข้อนี้จะแสดงการประยุกต์ใช้วิธีแรงเสมือน เพื่อหาระยะการขจัดและค่าความชันที่จุดบนคาน ระยะการขจัด Δ ของจุด A บนคานในรูปที่ 8-16(ข) เกิดจากแรงกระทำจริงแบบกระจาย w เนื่องจากแรงกระทำนี้ทำให้เกิดแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดภายในคาน ต้องพิจารณางานเสมือนภายในอันเนื่องมาจากแรงกระทำดังกล่าวนี้ ในตัวอย่างที่ 8.7 ได้แสดงระยะการทรุดตัวของคานเนื่องจากแรงเฉือนไม่จำเป็นต้องคิดเพราะมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับระยะการทรุดตัวของคานที่เกิดจากโมเมนต์ดัดโดยเฉพาะอย่างยิ่ง ถ้าคานมีความยาวมาก ดังนั้น พิจารณาเพียงพลังงานความเครียดเสมือนที่เกิดจากโมเมนต์ดัด ตารางที่ 8.1 จะต้องประยุกต์ใช้ร่วมกับสมการที่ 8-30 จะได้สมการงานเสมือนสำหรับคาน คือ

$$1.\Delta = \int_0^L \frac{mM}{EI}\,dx \qquad (8\text{-}30)$$

เมื่อ

- L = แรงเสมือนหนึ่งหน่วยเป็นแรงภายนอกที่กระทำบนคานในทิศทางเดียวกันกับ Δ
- Δ = ระยะการขจัดที่เกิดจากแรงกระทำจริงที่กระทำต่อคาน
- M = โมเมนต์เสมือนภายในคานแสดงเป็นฟังก์ชั่นของ x ซึ่งเกิดจากแรงเสมือนหนึ่งหน่วย
- M = โมเมนต์ดัดภายในคานแสดงเป็นฟังก์ชั่นของ x และเกิดจากแรงกระทำจริง
- E = โมดูลัสความยืดหยุ่นของวัสดุ
- I = โมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่หน้าตัดคำนวณรอบแกนสะเทิน

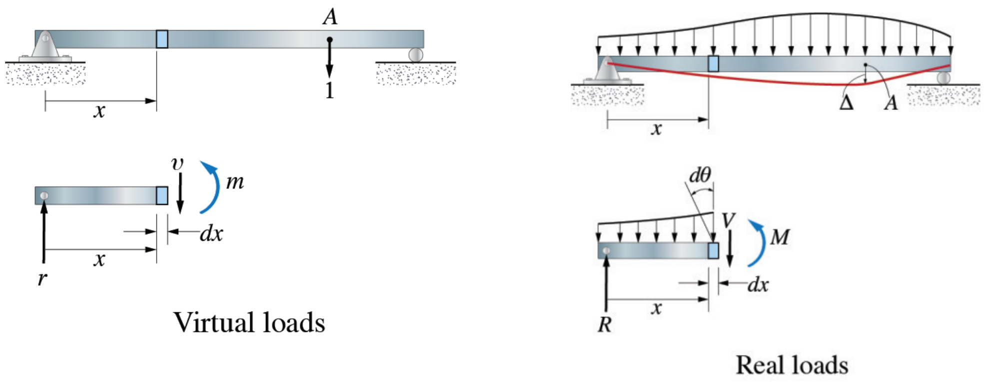
ในทำนองเดียวกัน ถ้าต้องการทราบค่าความชัน θ ของแนวเส้นสัมผัสที่จุดใดๆ บนรูปโค้งแบบยืดหยุ่นของคาน โมเมนต์เสมือนคู่ควบหนึ่งหน่วยจะต้องกระทำที่จุดนั้น และทำการคำนวณโมเมนต์เสมือนภายในสอดคล้องกัน คือ m_θ ถ้าประยุกต์ใช้สมการที่ 8-31 สำหรับกรณีนี้ และไม่คิดผลของการเปลี่ยนแปลงรูปร่างอันเนื่องมาจากแรงเฉือน จะได้ว่า

$$1.\theta = \int_0^L \frac{m_\theta M}{EI} dx \tag{8-31}$$

พบว่าการสร้างรูปสมการข้างต้นเป็นไปตามการพัฒนาในหัวข้อที่ 8-1 ยกตัวอย่างเช่น แรงเสมือนหนึ่งหน่วยซึ่งเป็นแรงภายนอกทำให้เกิดโมเมนต์เสมือนภายใน m ในคานที่ตำแหน่ง x ดังแสดงในรูปที่ 8-16(ก) เมื่อแรงกระทำจริง w ทำให้ชิ้นส่วน dx ที่ x เกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างหรือหมุนไปเป็นมุม $d\theta$ ในรูปที่ 8-16(ข) ถ้าวัสดุมีการตอบสนองแบบยืดหยุ่นแล้วค่า $d\theta$ จะมีค่าเท่ากับ $(M/EI)dx$ ดังนั้น งานเสมือนภายนอกคือ $1.\Delta$ จะมีค่าเท่ากับงานเสมือนภายในของคานทั้งหมด $\int m(M/EI)dx$ ดังสมการที่ 8-30

ชิ้นส่วนบางอย่างถูกกระทำด้วยพลังงานความเครียดเสมือนที่เกิดจากแรงกระทำตามแนวแกน แรงเฉือน และโมเมนต์บิดเมื่อกรณีนี้เกิดขึ้น ให้พิจารณารวมในสมการข้างต้น โดยเทอมของพลังงานสำหรับแรงกระทำดังกล่าวนี้ได้รวมกันอยู่ในรูปสมการที่ 8-32

เมื่อประยุกต์ใช้สมการที่ 8-30 และสมการที่ 8-31 แล้วทำการอินทิเกรตเทอมทางด้านขวามือเป็นค่าของพลังงานความเครียดที่เกิดจากโมเมนต์ดัดเสมือนที่เก็บสะสมในคาน ถ้าแรงกระทำเป็นจุดหรือโมเมนต์คู่ควบที่กระทำบนคานหรือแรงกระทำแบบกระจายแบบไม่ต่อเนื่องการอินทิเกรตครั้งเดียวไม่สามารถกระทำได้ครอบคลุมตลอดความยาวทั้งหมดของคาน พิกัด x ต้องมีช่วงที่ไม่แน่นอนขึ้นกับชนิดของแรงกระทำ นอกจากนั้นไม่จำเป็นที่ค่า x มีจุดกำเนิดเดียวกัน อย่างไรก็ตามระยะ x ที่เลือกสำหรับการหาค่าของโมเมนต์จริง M ต้องเหมือนกันกับระยะ x ที่ใช้สำหรับการหาโมเมนต์เสมือน m หรือ m_θ ยกตัวอย่างเช่น พิจารณาคานดังแสดงในรูปที่ 8-17 เมื่อต้องการหาระยะการขจัดที่จุด D สามารถใช้ระยะ x_1 เพื่อหาพลังงานความเครียดในช่วง AB, ใช้ระยะ x_2 ในช่วง BC, x_3 ในช่วง DE และ x_4 ในช่วง DC ในกรณีใดๆ พิกัดระยะ x ควรเลือกให้เหมาะสมและง่ายต่อการคำนวณหาค่า M และ m (หรือ m_θ)



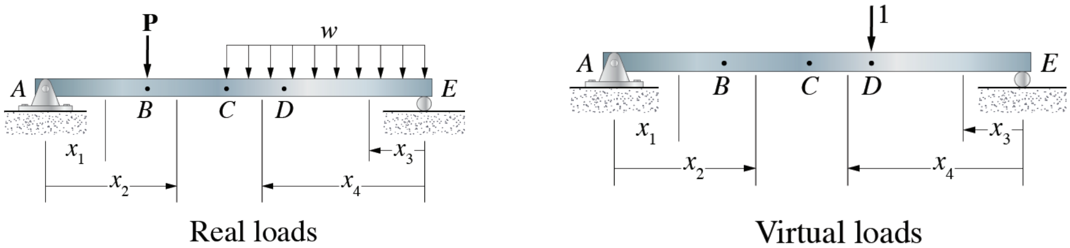
(ก) (ข)

รูปที่ 8-18 โมเมนต์ดัดที่เกิดขึ้นจากแรงเสมือนและแรงจริง

วิธีการสำหรับวิเคราะห์ (procedure for analysis)

ขั้นตอนดังกล่าวต่อไปนี้แสดงวิธีที่ใช้หาระยะการขจัดและค่าความชันที่จุดที่อยู่บนรูปโค้งแบบยืดหยุ่นของคานโดยใช้วิธีงานเสมือน

โมเมนต์เสมือน m หรือ m_θ (virtual moments, m or m_θ) ใส่แรงเสมือนหนึ่งหน่วยบนคานที่จุดที่ต้องการทราบค่า และมีทิศทางเดียวกันกับระยะการขจัดที่ต้องการ ถ้าต้องการหาค่าความชันต้องใส่โมเมนต์คู่ควบเสมือนหนึ่งหน่วยที่จุด x ที่ต้องการทราบค่าความชัน เมื่อใส่แรงกระทำเสมือนแล้วจะต้องปลดแรงกระทำจริงทั้งหมดออกจากคาน คำนวณหาโมเมนต์ภายใน m_θ หรือ m_θ ให้เป็นฟังก์ชั่นของ x เพื่อให้มีความสม่ำเสมอ ให้สมมุติว่า m หรือ m_θ กระทำในทิศทางที่เป็นบวกตามสัญลักษณ์ของเครื่องหมายของคาน



(ก) (ข)

รูปที่ 8-19 การพิจารณาการตัดช่วงเพื่อหาโมเมนต์ดัด

โมเมนต์จริง (real moments) โดยใช้พิกัด x เดียวกันกับที่จัดตั้งขึ้นเพื่อหาค่า $\mathbf{m}$ หรือ $\mathbf{m}_\theta$ หาโมเมนต์ภายใน M ที่เกิดจากแรงกระทำจริง

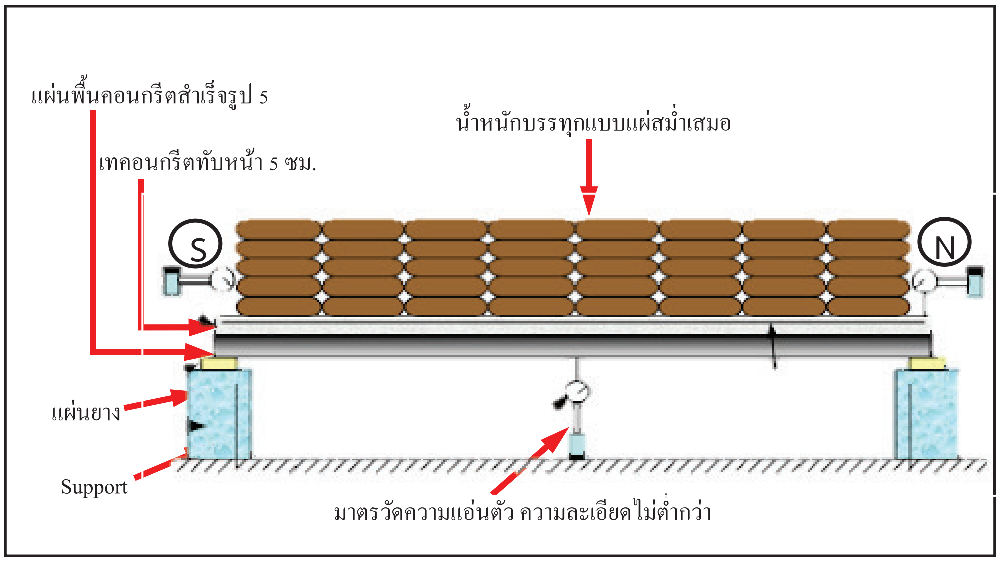
สมการงานเสมือน (virtual-work equation) ประยุกต์ใช้สมการงานเสมือนดังสมการที่ หรือ 8-30 หรือ 8-31 เพื่อหาระยะการขจัด Δ หรือค่าความชัน θ ต้องทำการอินทิเกรตในช่วงคานที่กำหนด ถ้าผลรวมทางพีชคณิตของการอินทิเกรตของคานทั้งหมดมีค่าเป็นบวก Δ หรือ θ จะมีทิศทางเดียวกันกับแรงเสมือนหนึ่งหน่วยหรือโมเมนต์คู่ควบเสมือนหนึ่งหน่วยตามลำดับ ถ้าผลลัพธ์มีค่าเป็นลบ Δ หรือ θ จะมีทิศทางตรงกันข้ามกับแรงกระทำหรือโมเมนต์คู่ควบเสมือนหนึ่งหน่วย

ตัวอย่างการประเมินแรงกระทำจริงกับคานเพื่อวิเคราะห์โครงสร้างและการหาค่าการโก่งตัว เริ่มต้นด้วยการประเมินน้ำหนักของวัสดุที่ใช้กับโครงสร้าง ในบางกรณีจะเป็นลักษณะน้ำหนักบรรทุกแบบกระจายสม่ำเสมอ (uniform load) ดังแสดงตัวอย่างเบื้องต้นในรูปที่ 8-20 ซึ่งแบ่งได้เป็น 2 ประเภทหลัก คือ น้ำหนักบรรทุกคงที่ (dead load) ซึ่งส่วนใหญ่จะเป็นน้ำหนักจากวัสดุที่ใช้ทำโครงสร้างอาคารเป็นหลัก เช่น ฐานราก เสา คาน พื้น หลังคา ผนัง กระเบื้องปูพื้น เป็นต้น ส่วนอีกประเภท คือ น้ำหนักบรรทุกจร (live load) เช่น ผู้ใช้อาคาร รถยนต์ แรงลม เป็นต้น

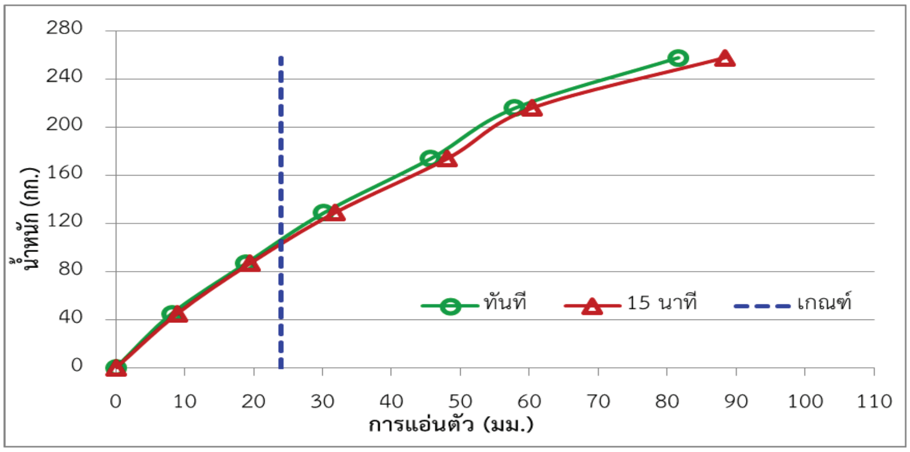
เมื่อพิจารณาตัวอย่างสะพานคนเดินในรูปที่ 8-20 การคำนวณน้ำหนักบรรทุกคงที่ของสะพานในตัวอย่างรูปที่ 8-20 แบ่งแยกย่อยได้ คือ 1) น้ำหนักของโครงสร้างแผ่นพื้น เป็นลักษณะแผ่นพื้นสำเร็จรูปแบบตัน ขนาดแต่ละแผ่นเท่ากับ 0.35 m × 5 m หนา 5 cm. เป็นโครงสร้างช่วงกลางสะพาน และ 2) น้ำหนักคอนกรีตเททับหน้ามีความหนา 5 cm. เมื่อเทเสร็จทำการขัดหยาบเพื่อกันลื่น โดยทั้งสองส่วนนี้จะเป็นน้ำหนักบรรทุกคงที่หลักๆ ของสะพาน รวมความหนาเป็น 10 cm. ที่ความหนาแน่นคอนกรีต 2400 kg/m^3 จึงมีน้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอ 240 kg/m^2 ส่วนน้ำหนักบรรทุกจรจะมีกำหนดไว้ในเกณฑ์การออกแบบขึ้นอยู่กับประเภทการใช้อาคารนั้นๆ มีหน่วยเป็น kg/m^2 [7]

รูปที่ 8-20 แผ่นพื้นเป็นตัวอย่างการกระจายน้ำหนักบรรทุกที่ของสะพาน [7]

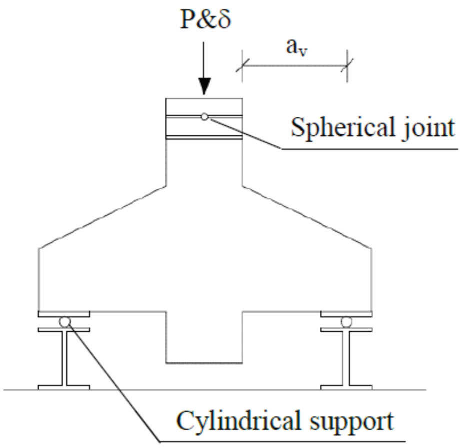
การวิเคราะห์หาการโก่งตัวตามทฤษฎีด้วยวิธีพลังงาน จะทำให้ได้ผลเฉลยแบบแม่นตรง (exact solution) ของโครงสร้างนั้นๆ ผลนี้จะใช้เปรียบเทียบกับพฤติกรรมจริงของโครงสร้าง ซึ่งจะจำลองการทดสอบให้ตรงตามทฤษฎีทั้งในส่วนของน้ำหนักที่กระทำและจุดรองรับ ดังรูปที่ 8-21 ถึง 8-24 เป็นการทดสอบแผ่นพื้นสำเร็จรูปที่ใช้ทำพื้นสะพานที่กึ่งกลางแผ่นพื้นสำเร็จรูป [7] และพฤติกรรมของคานหูช้างซึ่งทดสอบหาค่าการโก่งตัวของโครงสร้างที่จุดที่แรงกระทำของคานหูช้าง [6] ผลการโก่งตัวจากการทดลองจะมีค่าแตกต่างจากทฤษฎีเนื่องจากมีปัจจัยอื่น เช่น ความล้า ความคืบ เป็นต้น วิธีงานเสมือนในบทนี้ไม่ได้นำมาพิจารณา



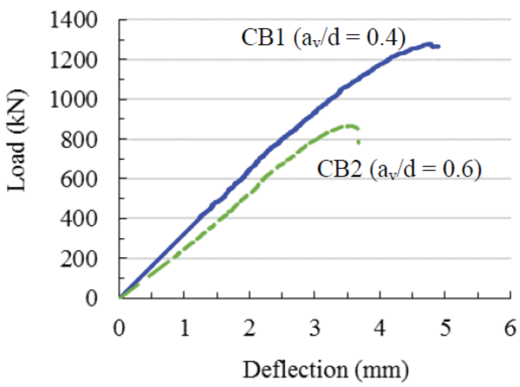
รูปที่ 8-21 การติดตั้งอุปกรณ์และการทดสอบหาค่าการโก่งตัวของแผ่นพื้นสำเร็จรูป [7]



รูปที่ 8-22 ตัวอย่างผลการทดสอบหาค่าการโก่งตัวของแผ่นพื้นสำเร็จรูป [7]



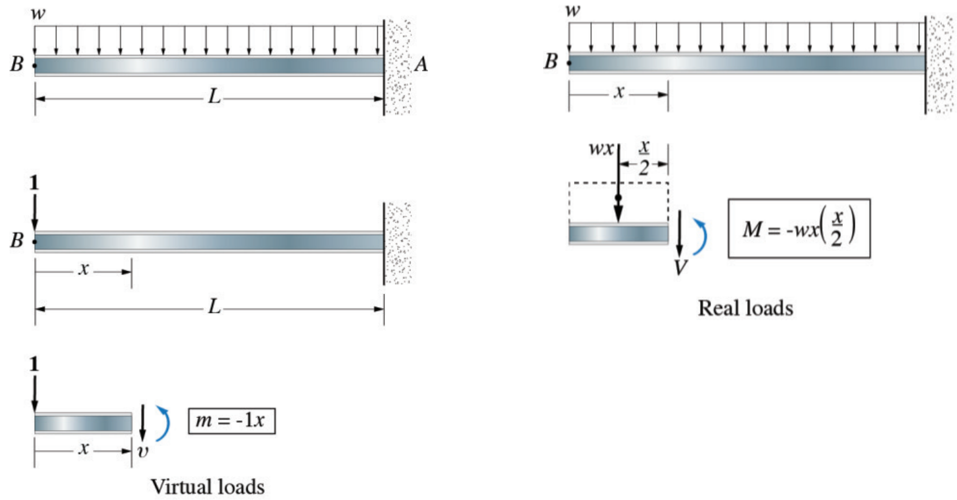
รูปที่ 8-23 การติดตั้งอุปกรณ์และการทดสอบหาค่าการโก่งตัวของคานหูช้าง [6]



รูปที่ 8-24 ตัวอย่างผลการทดสอบหาค่าการโก่งตัวของคานหูช้าง [6]

ตัวอย่างที่ 8.11

จงคำนวณหาระยะการขจัดที่จุด B บนคานดังแสดงในรูป เมื่อ EI เป็นค่าคงที่



รูปตัวอย่างที่ 8.11

วิธีทำ

โมเมนต์เสมือน m (virtual moment, m) ต้องการทราบค่าระยะการขจัดในแนวดิ่งของจุด B จึงต้องวางแรงเสมือนหนึ่งหน่วยที่จุด B ในรูปที่ 8-17(ข) มีความต่อเนื่องกันของแรงกระทำบนคานทั้งแรงกระทำจริงและแรงเสมือน ดังนั้นพิกัดของแกน x หาได้โดยการตัดภาคตัดเพียงครั้งเดียวและแกน x มีจุดเริ่มต้นที่จุด B เนื่องจากแรงปฏิกิริยาที่จุด A ไม่จำเป็นต้องคำนวณเพื่อหาโมเมนต์ภายใน m และ M โดยใช้ภาคตัด โมเมนต์ภายใน m คำนวณได้ดังแสดงในรูปที่ 8-17(ข)

โมเมนต์จริง M (real moment, M) โดยใช้พิกัดของแกน x และทำการตัดภาคตัดเพียงครั้งเดียว โมเมนต์ดัดภายใน M คำนวณได้ดังแสดงในรูปที่ 8-17(ค)

สมการงานเสมือน (virtual-work equation) ระยะการขจัดเกิดขึ้นที่จุด B คือ

$$1.\Delta_B = \int \frac{mM}{EI}\,dx = \int_0^L \frac{(-1x)(-wx^2/2)dx}{EI}$$

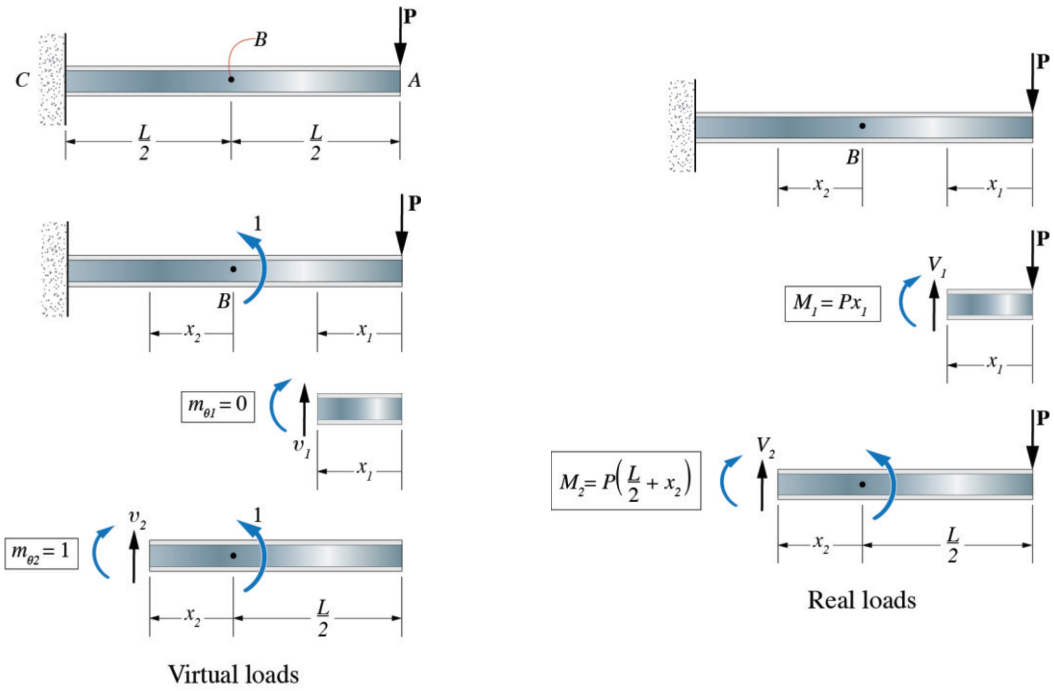
$$\Delta_B = \frac{wL^4}{8EI} \qquad \text{ตอบ}$$

ค่านี้ตรงกับค่าที่คำนวณหาระยะการขจัดจากวิชากลศาสตร์วัสดุ I

หมายเหตุ : ไม่คิดผลของพลังงานความเครียดเสมือนที่เกิดจากแรงเฉือนเนื่องจากมีผลน้อยมากเมื่อเทียบกับค่าที่ได้จากโมเมนต์ดัด โดยดูในตัวอย่างที่ 8.4

<u>ตัวอย่างที่ 8.12</u>

จงคำนวณหาค่าความชันที่จุด B ของคานดังแสดงในรูป เมื่อ EI เป็นค่าคงที่ P



รูปตัวอย่างที่ 8.12

<u>วิธีทำ</u>

โมเมนต์เสมือน m_θ (virtual moments, m_θ) ค่าความชันที่จุด B หาได้โดยการวางโมเมนต์คู่ควบเสมือนหนึ่งหน่วยที่จุด B ดังแสดงในรูป พิกัดของแกน x ถูกเลือกเพื่อหาพลังงานความเครียดเสมือนทั้งหมดในคาน พิกัด x_1 ใช้หาพลังงานความเครียดภายในชิ้นส่วน AB และพิกัด x_2 ใช้หาพลังงานความเครียดในชิ้นส่วน BC โมเมนต์ดัดภายใน m_θ ภายในแต่ละชิ้นส่วนสามารถคำนวณได้โดยใช้วิธีหน้าตัดดังแสดงในรูป

โมเมนต์จริง M (real moments, M) โดยการใช้พิกัด x_1 และ x_2 คำนวณหาโมเมนต์ดัดภายใน M ดังแสดงไว้ในรูป

สมการงานเสมือน (virtual-work equation) ค่าความชันที่ B คือ

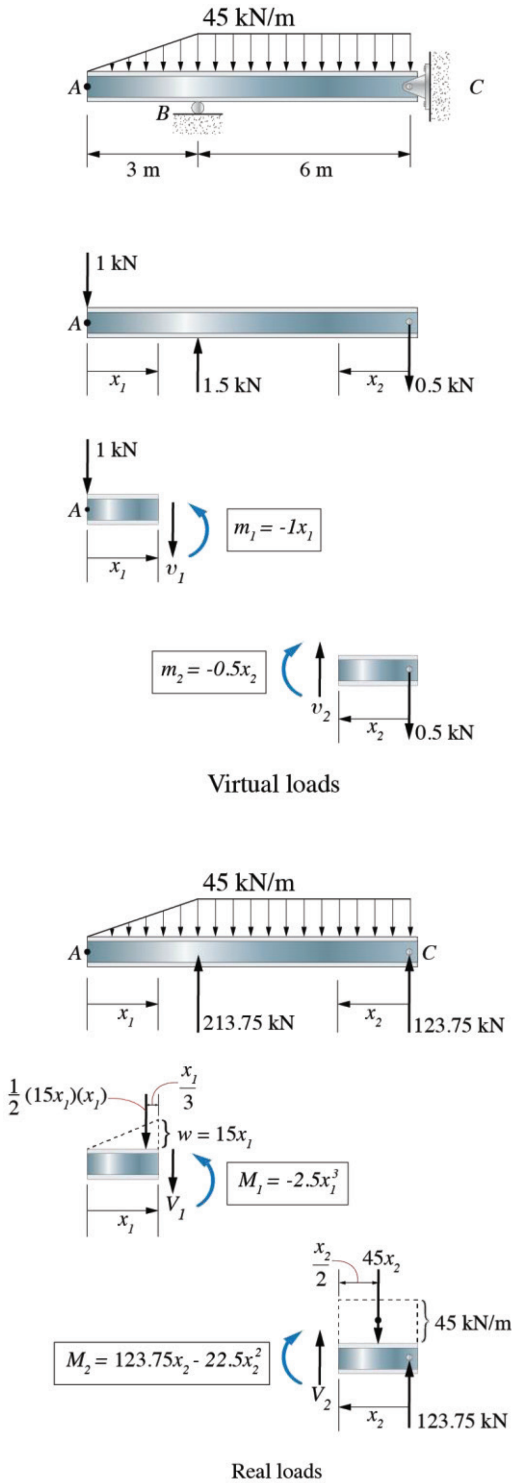
$$1.\theta_B = \int \frac{m_\theta M}{EI}\,dx = \int_0^{L/2} \frac{0(-Px_1)dx_1}{EI} + \int_0^{L/2} \frac{1\{-P[(L/2)+x_2]\}dx_2}{EI}$$

$$\theta_B = \frac{-3PL^2}{8EI}$$ ตอบ

เครื่องหมายลบจะบ่งบอกว่า θ_B มีทิศตรงกันข้ามกับทิศทางของโมเมนต์คู่ควบเสมือนที่แสดงไว้ในรูปตัวอย่างข้างต้น

<u>ตัวอย่างที่ 8.13</u>

จงคำนวณหาระยะการขจัดของจุด A ของคานเหล็กแสดงในรูป เมื่อค่า $I = 175.8 \times 10^{-6}\ m^4$ และ E_{st} = 200 GPa



รูปตัวอย่างที่ 8.13

วิธีทำ

โมเมนต์เสมือน m (virtual moments, m) คานถูกกระทำด้วยแรงเสมือนหนึ่งหน่วยที่จุด A แรงปฏิกิริยาดังแสดงในรูป โดยการใช้ระบบพิกัด x_1 และ x_2 เพื่อครอบคลุมช่วงทั้งหมดของคาน ใช้จุดเริ่มต้นที่จุด A และจุด C ใช้วิธีภาคตัดโมเมนต์ภายใน m ถูกแสดงดังไว้ในรูป

โมเมนต์จริง M (real moments, M) แรงปฏิกิริยาของคานจริงสามารถคำนวณก่อนดังแสดงในรูป แล้วใช้ระบบพิกัด x เดียวกันกับที่ใช้กับ m เพื่อหาโมเมนต์ภายใน M

สมการงานเสมือน (virtual-work equation) ประยุกต์ใช้สมการงานเสมือนกับคานโดยใช้ข้อมูลดังแสดงในรูป จะได้ว่า

$$1\text{kN}.\Delta_A = \int \frac{mM}{EI}\,dx = \int_0^3 \frac{(-1x_1)(-2.5x_1^3)\,dx_1}{EI}$$

$$+\int_0^6 \frac{(-0.5x_2)(123.75\,x_2 - 22.5x_2{}^2)\,dx_2}{EI}$$

หรือ

$$1\text{kN}.\Delta_A = \frac{0.5(3^5)}{EI} - \frac{20.625(20)^3}{EI} + \frac{2.8125(6)^4}{EI}$$

$$\Delta_A = \frac{-688.5\,\text{kN}\times\text{m}^3}{EI}$$

แทนค่าของ E และ I ในสมการข้างต้น จะได้ว่า

$$\Delta_A = \frac{-688.5\,\text{kN}\times\text{m}^3}{\left[200(10^6)\,\text{kN/m}^2\right]\left[175.8\times(10^{-6})\,\text{m}^4\right]}$$

$$= -19.6\text{ mm} \qquad \text{ตอบ}$$

เครื่องหมายลบบ่งบอกว่าจุด A มีระยะการขจัดในทิศทางพุ่งขึ้น

8.8 ทฤษฎีของคาสทีเกียรโน

ในปี ค.ศ. 1879 วิศวกรรถไฟชาวอิตาลี คือ อัลเบอร์โต คาสทีเกียรโน (Alberto Castigliano) ตีพิมพ์หนังสือที่บรรยายถึงวิธีการสำหรับการหาระยะการขจัดและค่าความชันที่จุดใดๆ ในวัตถุ วิธีการนี้เรียกกันว่า ทฤษฎีที่สองของคาสทีเกียรโน (Castigliano’s Second Theorem) ประยุกต์ใช้ กับวัตถุที่มีอุณหภูมิคงที่ มีฐานรองรับแข็งเกร็ง และวัสดุมีพฤติกรรมยืดหยุ่นแบบเชิงเส้น ทฤษฎีกล่าวว่าระยะการขจัดมีค่าเท่ากับการหาอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งของพลังงานความเครียดที่เกิดขึ้นในวัตถุเทียบกับแรงกระทำที่จุดที่ต้องการทราบค่าและมีพิกัดที่สอดคล้องกัน ในทำนองเดียวกัน ค่าความชันของแนวเส้นสัมผัสที่จุดที่ต้องการทราบค่าในวัตถุมีค่าเท่ากับการหาอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งของพลังงานความเครียดที่เกิดขึ้นในวัตถุเทียบกับโมเมนต์คู่ควบที่กระทำที่จุดที่ต้องการทราบค่าและมีทิศทางค่าความชันที่สอดคล้องกัน

เพื่อพิสูจน์ทฤษฎีที่สองของคาสทีเกียรโน พิจารณาวัตถุที่มีรูปทรงใดๆ ที่ถูกกระทำด้วยชุดของแรง n แรงคือ $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ในรูปที่ 8-18 เนื่องจากงานที่ทำจากแรงภายนอกโดยแรงดังกล่าวนี้มีค่าเท่ากับพลังงานความเครียดภายในที่เก็บสะสมในวัตถุโดยประยุกต์ใช้การอนุรักษ์ของพลังงาน นั่นคือ

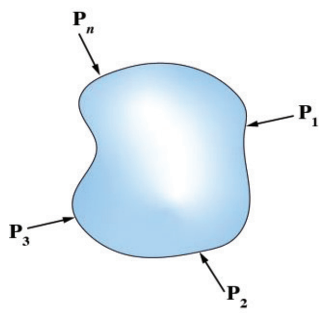
$$U_i = U_e$$

อย่างไรก็ตาม งานภายนอกเป็นฟังก์ชั่นของแรงกระทำภายนอก $U_e = \sum \int P\,dx$ ดังแสดงในสมการที่ 8-1 ดังนั้น งานภายในจึงเป็นฟังก์ชั่นของแรงกระทำภายนอกเช่นกัน

$$U_i = U_e = f(P_1, P_2, \ldots, P_n) \qquad (8\text{-}31)$$

ถ้าแรงภายนอกใดๆ เช่น P_j มีขนาดเพิ่มขึ้นเพียงเล็กน้อย dP_j งานภายในจะเพิ่มขึ้นเช่นกัน นั่นคือพลังงานความเครียดจะกลายเป็น

$$U_i + dU_j = U_i + \frac{\partial U_j}{\partial P_j} dP_j \qquad (8\text{-}32)$$



รูปที่ 8-25 หลักการคาสทีเกียรโน

ค่านี้ไม่ขึ้นอยู่กับลำดับแรง n ที่กระทำต่อวัตถุ ยกตัวอย่างเช่น เมื่อแรง dP_j กระทำต่อวัตถุเริ่มแรกแล้วมีแรงกระทำ $P_1, P_2, ..., P_n$ กระทำร่วมด้วย ในกรณีนี้ dP_j ทำให้วัตถุเกิดระยะการขจัดปริมาณเล็กๆ $d\Delta_i$ ในทิศทางของ dP_j โดยสมการที่ 8-2 $\left(U_e = \frac{1}{2}P_j\Delta_j\right)$ การเพิ่มขึ้นของพลังงานความเครียดจะกลายเป็น $\frac{1}{2}dP_j d\Delta_j$ ค่านี้เป็นอนุพันธ์อันดับสองและอาจทำการตัดทิ้งได้ นอกจากนี้กระทำของแรงกระทำ $P_1, P_2, ..., P_n$ ทำให้ dP_j เกิดการเคลื่อนที่ด้วยระยะการขจัด Δ_j ดังนั้นพลังงานความเครียดจะกลายเป็น

$$U_i + dU_j = U_i + dP_j\Delta_j \tag{8-33}$$

U_i เป็นพลังงานความเครียดภายในวัตถุเกิดจากแรงกระทำ $P_1, P_2, ..., P_n$ และ $dU_j = dP_j\Delta_j$ เป็นพลังงานความเครียดที่เพิ่มขึ้นเนื่องจาก dP_j

โดยสรุปแล้ว สมการที่ 8-32 แทนพลังงานความเครียดที่เกิดขึ้นในวัตถุ ซึ่งหาได้โดยการกระทำของแรงกระทำที่จุดเริ่มต้นคือ $P_1, P_2, ..., P_n$ แล้ว dP_j ดังสมการที่ 8-33 แทนพลังงานความเครียดที่หาได้โดยการกระทำของแรง dP_j จะได้ว่า

$$\Delta i = \frac{\partial U_i}{\partial P_j} \tag{8-34}$$

นั่นคือ ระยะการขจัด Δ_j ในทิศทางของ P_j มีค่าเท่ากับการหาอนุพันธ์ย่อยของพลังงานความเครียดเทียบกับ P_j

พบว่าสมการที่ 8-34 เป็นสมการที่คำนึงถึงความสอดคล้องกันของวัตถุ (body’s compatibility requirements) เนื่องจากเป็นเงื่อนไขที่มีความสัมพันธ์กันกับระยะการขจัด นอกจากนั้นการพิสูจน์ข้างต้นอาศัยหลักการของแรงอนุรักษ์ (conservative forces) แรงดังกล่าวนี้มีอิสระ ดังนั้น จึงไม่มีการสูญเสียพลังงาน เมื่อวัสดุมีพฤติกรรมยืดหยุ่นแบบเชิงเส้นแรงที่กระทำมีการอนุรักษ์และทฤษฎีนี้สามารถใช้ได้ ซึ่งไม่เหมือนกับวิธีการของแรงเสมือนที่กล่าวในหัวข้อก่อนหน้านี้ที่จะประยุกต์ใช้ได้ทั้งวัสดุที่มีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นและไม่ยืดหยุ่น ทฤษฎีที่หนึ่งของคาสทีเกียรโนมีความคล้ายกันกับทฤษฎีที่สองของคาสทีเกียรโน เพราะมีความสัมพันธ์กันระหว่างแรงกระทำ P_j และหลักการหาอนุพันธ์ย่อยของพลังงานความเครียดเทียบกับระยะการขจัดที่สอดคล้องกัน นั่นคือ $P_j = \partial U_i / \partial \Delta_j$ การพิสูจน์สามารถทำได้คล้ายกับที่กล่าวมาแล้วข้างต้นและเหมือนวิธีการของระยะการขจัดเสมือน ทฤษฎีที่หนึ่งของคาสทีเกียรโนใช้ได้กับวัตถุที่มีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นและไม่ยืดหยุ่น ทฤษฎีนี้มีความสัมพันธ์กับสมการสมดุล (equilibrium requirements) สำหรับวัตถุ อย่างไรก็ตามยังมีข้อจำกัดของการประยุกต์ใช้สมการนี้ แต่ในที่นี้ไม่ได้กล่าวถึงข้อกำหนดดังกล่าว

8.9 การประยุกต์ใช้ทฤษฎีของคาสทีเกียรโนกับโครงถัก

เนื่องจากชิ้นส่วนโครงถักถูกกระทำด้วยแรงกระทำตามแกนเท่านั้น พลังงานความเครียดที่กำหนดโดยสมการที่ 8-16 $(U_i = N^2L/2AE)$ และเมื่อแทนค่าสมการนี้ในสมการที่ 8-34 และตัดทิ้งตัวห้อยออก จะได้ว่า

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial P}\Sigma\frac{N^2L}{2AE}$$

โดยทั่วไปจะทำการหาอนุพันธ์แยกกันก่อนแล้วจึงนำแต่ละเทอมมารวมกัน นอกจากนั้น และเป็นค่าคงที่ของชิ้นส่วนของโครงถัก ดังนั้น จะเขียนใหม่ได้เป็น

$$\Delta = \Sigma N\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)\frac{L}{AE} \tag{8-35}$$

เมื่อ

Δ = ระยะการขจัดจริงของจุดต่อของโครงถัก

P = แรงภายนอกที่แปรค่าได้ซึ่งกระทำที่จุดต่อโครงถักในทิศทางเดียวกันกับ

N = แรงตามแนวแกนของชิ้นส่วนเกิดจากแรง P และแรงกระทำภายนอกบนโครงถัก

L = ความยาวของชิ้นส่วน

A = พื้นที่หน้าตัดของชิ้นส่วน

E = โมดูลัสของความยืดหยุ่นของวัสดุ

เพื่อหาอนุพันธ์ย่อย $\partial N/\partial P$ จึงจำเป็นต้องให้ตัวแปร P เป็นตัวแปรค่า ไม่ใช่ปริมาณเชิงตัวเลข หรือพูดอีกนัยหนึ่งว่า ในแต่ละแรงของแรงตามแนวแกนภายใน N จะเป็นฟังก์ชั่นของแรง P โดยการเปรียบเทียบ สมการที่ 8-35 จะมีความคล้ายกันกับสมการที่ใช้สำหรับวิธีงานเสมือน ดังสมการที่ 8-33 $\left(1.\Delta = \sum nNL/AE\right)$ ยกเว้นค่า n จะถูกแทนที่โดย $\partial N/\partial P$ เทอมดังกล่าวนี้ n และ $\partial N/\partial P$ มีความหมายเหมือนกัน เนื่องจากทั้งสองค่าแทนอัตราของการเปลี่ยนแปลงของแรงภายในตามแนวแกนเทียบกับแรงกระทำ P หรือพูดอีกนัยหนึ่งว่า แรงตามแนวแกนต่อแรงกระทำหนึ่งหน่วย

วิธีการสำหรับวิเคราะห์ (procedure for analysis)

ขั้นตอนนี้จะกล่าวถึงวิธีที่ใช้หาระยะการขจัดของจุดต่อใดๆ บนโครงถักโดยใช้ทฤษฎีที่สองของคาสทีเกียรโน

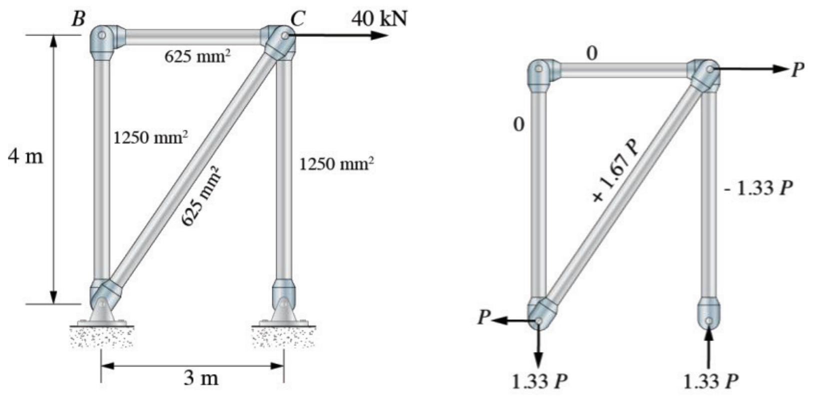
แรงภายนอก P (external force, P) วางแรง P บนโครงถักที่จุดต่อที่ต้องการทราบค่าระยะการขจัด แรงนี้จะแปรค่าได้และควรมีทิศทางเดียวกันกับทิศทางของค่าระยะการขจัด

แรงภายใน N (internal forces, N) การหาแรง N ในแต่ละชิ้นส่วนที่เกิดขึ้นโดยแรงกระทำจริง (เป็นค่าตัวเลข) และแรงแปรค่า P ถูกสมมุติว่าเป็นแรงดึงถ้ามีค่าเป็นบวกและเป็นแรงอัดถ้ามีค่าเป็นลบ นอกจากนั้น คำนวณหาอนุพันธ์ย่อย $\partial N/\partial P$ ของแต่ละชิ้นส่วน ตามลำดับ หลังจากหาค่า N ได้แล้ว จะต้องหาค่า $\partial N/\partial P$ ค่า P จะเป็นค่าตัวเลขถ้าถูกแทนด้วยแรงกระทำจริงบนโครงถัก มิฉะนั้นจะต้องกำหนดให้แรง P มีค่าเท่ากับศูนย์

ทฤษฎีที่สองของคาสทีเกียรโน (Castigliano's Second Theorem) ประยุกต์ใช้สมการที่ 8.35 เพื่อหาระยะการขจัด Δ ที่ต้องการ คงเครื่องหมายพีชคณิตสำหรับค่าที่สอดคล้องกันของ N และ $\partial N/\partial P$ เมื่อแทนค่าเทอมดังกล่าวนี้ในสมการถ้าการรวมผลลัพธ์ $\Sigma N(\partial N/\partial P)L/AE$ มีค่าเป็นบวก แสดงว่า Δ อยู่ในทิศทางเดียวกันกับแรง P ถ้าผลลัพธ์มีค่าเป็นลบแสดงว่า Δ มีทิศทางตรงกันข้ามกับแรง P

<u>ตัวอย่างที่ 8.14</u>

จงคำนวณหาระยะการขจัดในแนวราบของจุด C ของโครงถักเหล็กดังแสดงในรูป พื้นที่หน้าตัดของแต่ละชิ้นส่วนบ่งบอกไว้ในรูป เมื่อค่า E_{st} = 210 GPa



รูปตัวอย่างที่ 8.14

วิธีทำ

แรงภายนอก P (external force, P) เนื่องจากต้องการทราบค่าของระยะการขจัดตามแนวราบที่จุด C แรงตามแนวราบ P ต้องกระทำที่จุด C ดังแสดงในรูป จะกำหนดให้เท่ากับ 40 kN เมื่อทำการหาค่าอนุพันธ์ย่อยแล้ว

แรงภายใน N (internal forces, N) โดยใช้วิธีจุดต่อสามารถคำนวณหาแรงภายใน N ในแต่ละชิ้นส่วนได้ผลลัพธ์ดังแสดงในรูป ขจัดเทอมของข้อมูลให้อยู่ในรูปตาราง จะได้ว่า

ชิ้นส่วน	N	$\frac{\partial N}{\partial P}$	$N(P = 40\ kN)$	L	$N\left(\frac{\partial N}{aP}\right)L$
AB	0	0	0	8	0
BC	0	0	0	6	0
AC	1.67P	1.67	13.33	10	222.2
CD	-1.33P	-1.33	-10.67	8	113.8

ทฤษฎีอันดับสองของคาสทีเกียรโน (Castigliano's Second Theorem) ประยุกต์ใช้สมการที่ 8-35 จะได้ว่า

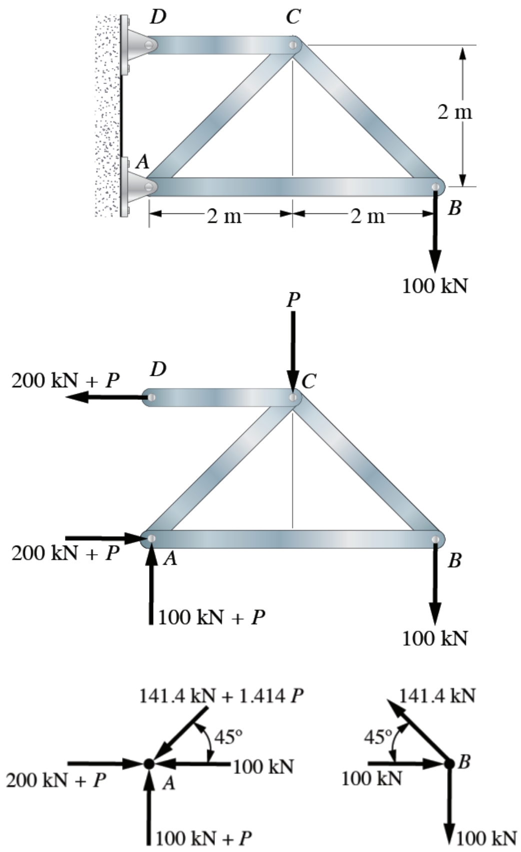
$$\Delta_{Ch} = \sum N\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)\frac{L}{AE}$$

$$= 0+0+\frac{556.7\times10^3\ N\times m}{(625\ mm^2)(210\times10^3\ N/mm^2)}+\frac{283.7\times10^3\ N\times m}{(1250\ mm^2)(210\times10^3\ N/mm^2)}$$

$$= 4.24 + 1.08 = 5.32\ mm$$ ตอบ

ตัวอย่างที่ 8.15

จงคำนวณหาระยะการขจัดในแนวดิ่งของจุด C ของโครงถักเหล็กดังแสดงในรูป พื้นที่หน้าตัดของแต่ละชิ้นส่วนคือ A = 400 mm^2 และ E_{st} = 200 GPa



รูปตัวอย่างที่ 8.15

<u>วิธีทำ</u>

แรงภายนอก P (external force, P) แรงแนวดิ่ง P ต้องกระทำต่อโครงถักที่จุด C เนื่องจากต้องการทราบระยะการขจัดในแนวดิ่งดังแสดงในรูป

แรงภายใน N (internal forces, N) ต้องการทราบแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับของโครงถัก A และ D ซึ่งผลลัพธ์ดังแสดงในรูป โดยใช้วิธีการใช้จุดต่อ สามารถทราบแรงภายใน โดยใช้วิธีการใช้จุดต่อ สามารถทราบแรงภายใน N ในแต่ละชิ้นส่วนดังแสดงในรูป ผลลัพธ์ของ $\partial N/\partial P$ ได้แสดงไว้ในรูปแบบของตาราง พบว่า เนื่องจากของ P ไม่ใช้แรงกระทำจริงบนโครงถัก ดังนั้น จะได้ว่า P = 0

ชิ้นส่วน	N	$\frac{\partial N}{\partial P}$	$N(P=0)$	L	$N\left(\frac{\partial N}{aP}\right)L$
AB	-100	0	-100	4	0
BC	141.4	0	141.4	2.828	0
AC	-141.4-1.414P	-1.414	-141.4	2.828	565.7
CD	200+P	1	200	2	400
					$\Sigma 965.7\,\text{kN}\cdot\text{m}$

ทฤษฎีที่สองของคาสทีเกียรโน (Castigliano's Second Theorem) ประยุกต์ใช้สมการที่ 8-35 จะได้ว่า

$$\Delta_{C_v} = \sum N\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)\frac{L}{AE} = \frac{965.7\,\text{kN.m}}{AE}$$

แทนค่าของ A และ E จะได้ว่า

$$\Delta_{C_v} = \frac{965.7\,\text{kN.m}}{[400(10^{-6})\,\text{m}^2]\;200(10^6)\,\text{kN/m}^2}$$

$$= 0.01207\text{ m} = 12.1\text{ mm} \qquad \text{ตอบ}$$

จงนำคำตอบนี้ไปเปรียบเทียบกับคำตอบจากตัวอย่างที่ 8.8 ซึ่งใช้วิธีงานเสมือน จะได้คำตอบที่แตกต่างกันหรือไม่อย่างไร

8.10 การประยุกต์ใช้ทฤษฎีของคาสทีเกียรโนกับคาน

พลังงานความเครียดภายในสำหรับคานเกิดจากโมเมนต์ดัดและแรงเฉือนในตัวอย่างที่ 8.7 ถ้าคานยาว พลังงานความเครียดเนื่องจากแรงเฉือนไม่จำเป็นต้องนำมาคิด เพราะว่าเมื่อเทียบกับพลังงานความเครียดที่เกิดจากโมเมนต์ดัด แล้วมีค่าน้อยมาก พลังงานความเครียดภายในของคาน ที่กำหนดโดยสมการที่ 8-7 $(U_i = \int M^2 dx / 2EI)$ แทนค่าสมการดังกล่าวลงในสมการที่ 8-34 $(\Delta_i = \partial U_i / \partial P_i)$ และตัดตัวห้อย i ทิ้ง จะได้ว่า

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial P}\int_o^L \frac{M^2 dx}{2EI}$$

โดยทั่วไปจะทำการหาค่าอนุพันธ์ก่อนที่จะอินทิเกรต เมื่อ E และ I เป็นค่าคงที่ จะได้ว่า

$$\Delta = \int_o^L M\left(\frac{\partial M}{\partial P}\right)\frac{dx}{EI} \qquad (8\text{-}36)$$

เมื่อ

Δ = ระยะการขจัดของจุดที่ต้องการทราบค่าเกิดจากแรงกระทำจริงที่กระทำต่อคาน

P = แรงภายนอกที่แปรค่าซึ่งกระทำต่อคานในทิศทางเดียวกันกับ Δ

M = โมเมนต์ภายในคานแสดงเป็นฟังก์ชั่นของ x และเกิดจากแรง P และแรงกระทำภายนอกบนคานทั้งหมด

E = โมดูลัสของความยืดหยุ่นของวัสดุ

I = โมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่หน้าตัดคำนวณรอบแกนสะเทิน

ถ้าต้องการหาค่าความชันของแนวเส้นสัมผัส ที่จุดที่อยู่บนรูปโค้งแบบยืดหยุ่น การหาอนุพันธ์ย่อยของโมเมนต์ภายใน M เทียบกับโมเมนต์คู่ควบภายนอก (External Couple Moment) M' จะกระทำที่จุดที่ต้องการคำนวณหาคำตอบ สำหรับกรณีนี้

$$\theta = \int_o^L M\left(\frac{\partial M}{\partial P}\right)\frac{dx}{EI} \qquad (8\text{-}37)$$

สมการข้างต้นมีลักษณะเหมือนกับสมการที่ใช้สำหรับวิธีงานเสมือน (สมการที่ 8-36 และ 8-37) ยกเว้น m และ m_θ แทนค่าด้วย $\partial M / \partial P$ และ $\partial M / \partial M'$ ตามลำดับ

ถ้าแรงกระทำต่อชิ้นส่วนทำให้เกิดพลังงานความเครียดภายในชิ้นส่วนเนื่องจากแรงกระทำตามแนวแกน แรงเฉือน โมเมนต์ดัด และโมเมนต์บิด แล้วควรนำมารวมค่าดังกล่าวมาพิจารณาด้วยเมื่อใช้ทฤษฎีของคาสทีเกียรโน ต้องใช้ฟังก์ชั่นของพลังงานความเครียดที่พัฒนาไว้ในหัวข้อที่ 8.2 ตามด้วยหลักการอนุพันธ์ย่อย ผลลัพธ์สุดท้ายจะได้สมการ

$$\Delta = \Sigma N\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)\frac{L}{AE} + \int_o^L f_s V\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)\frac{dx}{GA} + \int_o^L M\left(\frac{\partial M}{\partial P}\right)\frac{dx}{EI} + \int_o^L T\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)\frac{dx}{GJ} \qquad (8\text{-}38)$$

วิธีการของการประยุกต์ใช้รูปสมการดังกล่าวนี้ โดยทั่วไปจะเหมือนกันกับวิธีการประยุกต์ใช้สมการที่ 8-36 และ 8-37 นั่นเอง

วิธีการสำหรับวิเคราะห์ (procedure for analysis)

ขั้นตอนต่อไปนี้จะกล่าวถึงวิธีการที่ใช้ในการคำนวณหาระยะการขจัดหรือค่าความชันที่จุดใดๆ บนรูปโค้งแบบยืดหยุ่นของคานโดยใช้ทฤษฎีที่สองของคาสทีเกียรโน

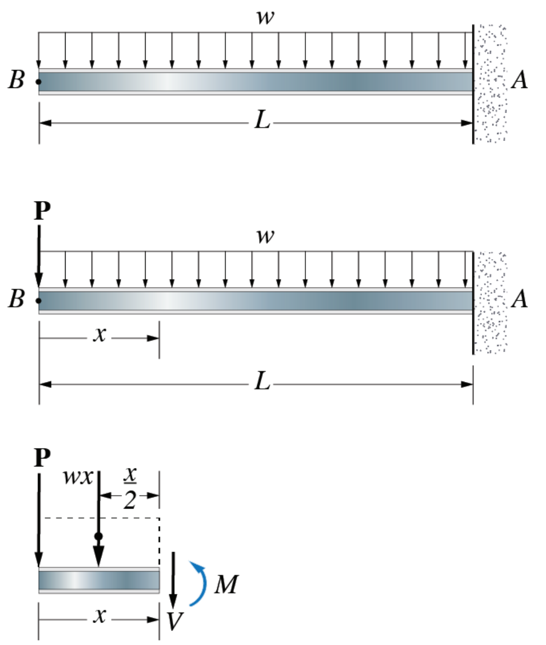
แรงภายนอก P **หรือโมเมนต์คู่ควบ** M' (external force P or couple moment M') วางแรง P บนคานที่จุดที่ต้องการคำนวณและทิศทางเดียวกันกับระยะการขจัดที่ต้องการ ถ้าต้องการหาค่าความชันของแนวเส้นสัมผัส ต้องวางโมเมนต์คู่ควบ M' ที่จุดที่ต้องการทราบค่าและจะสมมุติว่าทั้ง P และ M' มีขนาดที่แปรค่า

โมเมนต์ภายใน M (internal moments M)จัดตั้งพิกัดของแกน x ที่เหมาะสมที่ใช้ได้ตลอดช่วงของคานที่มีความต่อเนื่องของแรง แรงกระทำแบบกระจาย หรือโมเมนต์คู่ควบ คำนวณหาโมเมนต์ภายใน M ซึ่งเป็นฟังก์ชั่นของ P หรือ M' และทำการหาอนุพันธ์ย่อย $\partial M/\partial P$ หรือ $\partial M/\partial M'$ สำหรับแต่ละพิกัดของแกน x หลังจากหาค่า M และ $\partial M/\partial P$ หรือ $\partial M/\partial M'$ ได้จะต้องแทนค่า P หรือ M' เป็นค่าตัวเลขถ้ามีแรงภายนอกจริงหรือโมเมนต์คู่ควบจริงที่จุดดังกล่าวนี้จะต้องกำหนดให้ P หรือ M' มีค่าเท่ากับค่าศูนย์

ทฤษฎีที่สองของคาสทีเกียรโน (Castigliano’s Second Theorem) ประยุกต์ใช้สมการที่ 8-36 หรือ 8-37 เพื่อคำนวณหาระยะการขจัด Δ หรือ θ ต้องคำนวณหาค่า M และ $\partial M/\partial P$ หรือ $\partial M/\partial M'$ ถ้าผลลัพธ์ของค่าอินทิเกรตทั้งหมดมีค่าเป็นบวก Δ หรือ θ จะมีทิศทางเดียวกันกับแรง P หรือทิศทางเดียวกันกับ M' ถ้าผลลัพธ์มีค่าเป็นลบ Δ หรือ θ จะมีทิศทางตรงกันข้ามกับแรง P หรือ M'

ตัวอย่างที่ 8.16

จงคำนวณหาระยะการขจัดของจุด B บนคานดังแสดงในรูป เมื่อ EI เป็นค่าคงที่



รูปตัวอย่างที่ 8.16

วิธีทำ

แรงภายนอก P (external force P) แรงภายในแนวดิ่ง P ถูกวางบนคานที่จุด B ดังแสดง ในรูป

โมเมนต์ภายใน M (internal moments M) ตั้งแกน x และต้องทำการตัดภาพตัดหนึ่งครั้ง ระหว่างจุด A และ B ดังแสดงในรูปโมเมนต์ภายในที่คำนวณ คือ

$$\curvearrowleft + \sum M_{NA} = 0; \qquad M + wx\left(\frac{x}{2}\right) + P(x) = 0$$

$$M = \frac{-wx^2}{2} - Px$$

$$\frac{\partial M}{\partial P} = x$$

แทนค่า P = 0 จะได้ว่า

$$M = \frac{-wx^2}{2} \quad \text{และ} \quad \frac{\partial M}{\partial P} = -x$$

ทฤษฎีที่สองของคาสทีเกียรโน (Castigliano's Second Theorem) ประยุกต์ใช้สมการที่ 8-36 จะได้ว่า

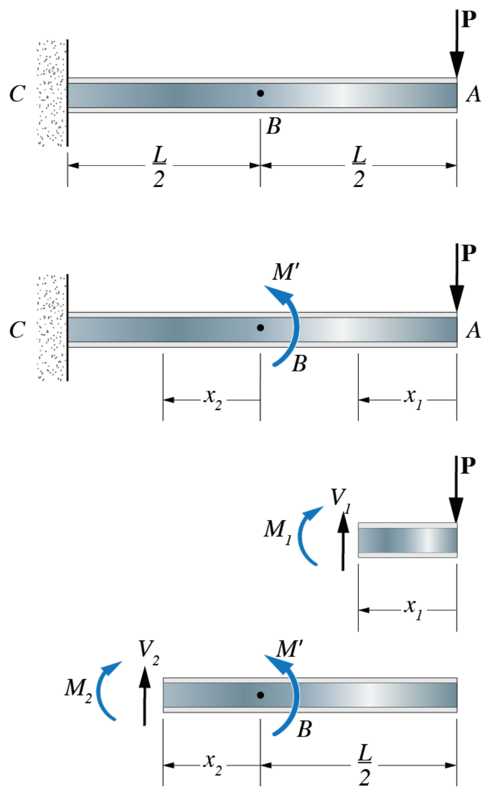
$$\Delta_B = \int_o^L M\left(\frac{\partial M}{\partial P}\right)\frac{dx}{EI} = \int_0^L \frac{(-wx^2/2)(-x)dx}{EI}$$

$$= \frac{wL^4}{8EI} \qquad \text{ตอบ}$$

คำตอบนี้จะมีค่าเท่ากันกับคำตอบของวิธีงานเสมือน ดังแสดงไว้ในตัวอย่างที่ 8.11

ตัวอย่างที่ 8.17

จงคำนวณหาค่าความชันที่จุด B ของคานดังแสดงในรูป เมื่อ EI เป็นค่าคงที่



รูปตัวอย่างที่ 8.17

วิธีทำ

โมเมนต์แรงคู่ควบภายนอก M (external couple moment M') เนื่องจากต้องการทราบค่าความชันที่จุด B โมเมนต์ของแรงคู่ควบภายนอก M' ที่อยู่บนคานที่จุดนี้ ดังแสดงในรูป

โมเมนต์ภายใน M (internal moments M) พิกัดทั้งสองคือ x_1 และ x_2 จะถูกนำมาใช้หาโมเมนต์ภายในคานเนื่องจากความไม่ต่อเนื่องกันของแรงกระทำ M' ที่ B จากรูปที่พิกัด x_1 มีช่วงจาก A ไปยัง B และ x_2 มีช่วงจาก B ไปยัง C โดยใช้วิธีภาคตัด ดังแสดงในรูป โมเมนต์ภายในคำนวณคือ

สำหรับ x_1

$$\curvearrowleft + \sum M_{NA} = 0; -M_1 - Px_1 = 0$$

$$M_1 = -Px_1$$

$$\frac{\partial M}{\partial M'} = 1$$

สำหรับ x_2

$$\curvearrowleft + \sum M_{NA} = 0; -M_2 + M' - P\left(\frac{L}{2} + x_2\right) = 0$$

$$M_2 = M' - P\left(\frac{L}{2} + x_2\right)$$

$$\frac{\partial M^2}{\partial M'} = 1$$

ทฤษฎีที่สองของคาสทีเกียรโน (Castigliano’s Second Theorem) กำหนดให้ $M' = 0$ และประยุกต์ใช้สมการที่ 8-37 จะได้ว่า

$$\theta_B = \int_0^L M\left(\frac{\partial M}{\partial M'}\right)\frac{dx}{EI}$$

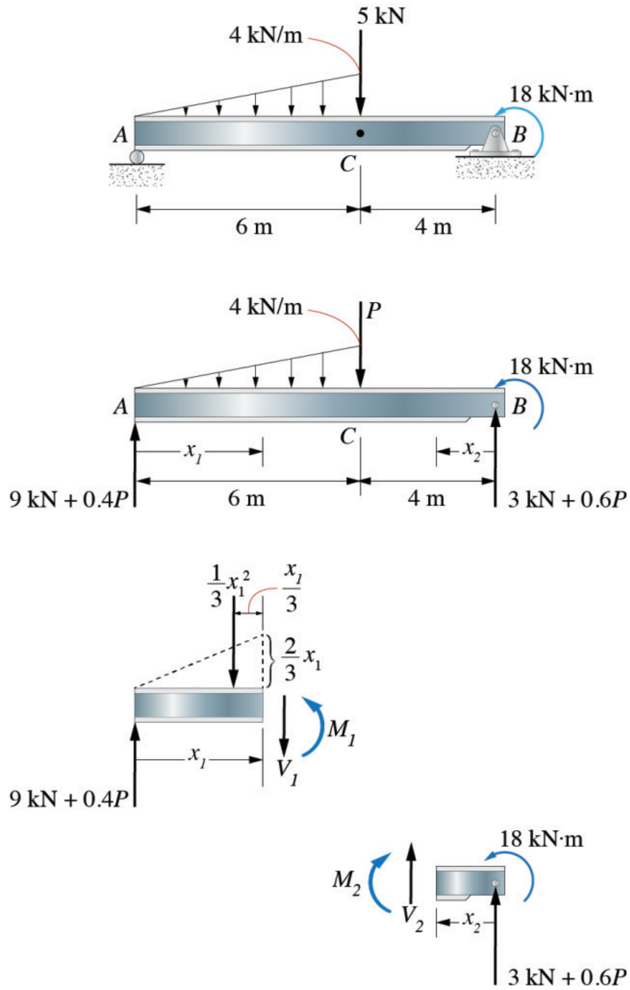
$$= \int_0^{L/2} \frac{(-Px_1)(0)dx_1}{EI} + \int_0^{L/2} \frac{-P[(L/2) + x_2](1)dx_2}{EI}$$

$$= \frac{-3PL^2}{8EI}$$ ตอบ

เครื่องหมายลบจะบ่งบอกว่า θ_B มีทิศทางตรงกันข้ามกับทิศทางของโมเมนต์แรงคู่ควบ M' นอกจากนี้ พบว่ามีคำตอบที่เหมือนกันเมื่อเปรียบเทียบกับตัวอย่างที่ 8.12 แม้จะคำนวณต่างวิธีกันก็ตาม

ตัวอย่างที่ 8.18

จงคำนวณหาระยะการขจัดในแนวดิ่งของจุด C ของคานเหล็กดังแสดงในรูป เมื่อค่า E_{st} = 210 GPa และ I = $125(10^{-6})$ m^4



รูปตัวอย่างที่ 8.18

วิธีทำ

แรงภายนอก P (external force P) แรงในแนวดิ่ง P ที่กระทำที่จุด C ดังแสดงในรูป แรงนี้จะกำหนดให้มีค่าเท่ากับ 5 kN

โมเมนต์ภายใน M (internal moments M) ในกรณีนี้ ต้องการพิกัดทั้งสองพิกัดของแกน x สำหรับการอินทิเกรต ดังแสดงในรูป เนื่องจากแรงกระทำมีความไม่ต่อเนื่องที่จุด C โดยใช้ภาคตัด ดังแสดงในรูป โมเมนต์ภายในจะสามารถคำนวณได้ดังนี้

สำหรับ x_1

$$\circlearrowleft + \sum M_{NA} = 0;\ M_1 + \frac{1}{3}x_1^2\left(\frac{x_1}{3}\right) - (9 + 0.4P)x_1 = 0$$

$$M_1 = (9 + 0.4P)x_1 - \frac{1}{9}x_1^3$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial P} = 0.4x_1$$

สำหรับ x_2

$$\circlearrowleft + \sum M_{NA} = 0;\ -M_2 + 18 + (3 + 0.6P)x_2 = 0$$

$$M_2 = 18 + (3 + 0.6P)x_2$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial P} = 0.6x_2$$

ทฤษฎีที่สองของคาสทีเกียรโน (Castigliano's Second Theorem) กำหนดให้ P = 5 kN และประยุกต์ใช้สมการที่ 8-36 จะได้ว่า

$$\Delta_{C_v} = \Delta_{C_v} = \int_0^L M\left(\frac{\partial M}{\partial P}\right)\frac{dx}{EI}$$

$$= \int_0^6 \frac{(11x_1 - \frac{1}{9}x_1^3)(0.4x_1)dx_1}{EI} + \int_0^4 \frac{(18 + 6x_2)(0.6x_2)dx_2}{EI}$$

$$= \frac{410.9\,kN.m^3}{[200(10^6)\,kN/m^2]125(10^{-6})\,m^4}$$

$$= 0.0164\,m = 16.4\,mm$$ ตอบ

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 8

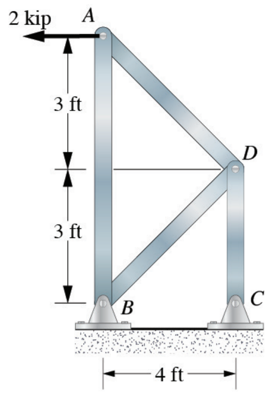
1) คำนวณหาพลังงานความเครียดที่เกิดจากโมเมนต์ดัด เมื่อ EI เป็นค่าคงที่

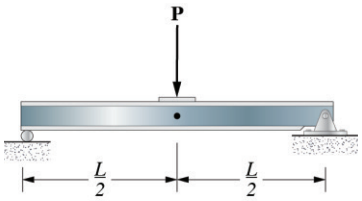
2) จงคำนวณหาพลังงานความเครียดที่เกิดจากโมเมนต์ดัดในคาน เมื่อ EI เป็นค่าคงที่

3) จงคำนวณหาระยะการขจัดในแนวราบของจุดต่อ A เมื่อแต่ละชิ้นส่วนทำจากเหล็ก A-36 และมีพื้นที่หน้าตัด 1.5 $in.^2$ โดยใช้หลักการอนุรักษ์พลังงาน

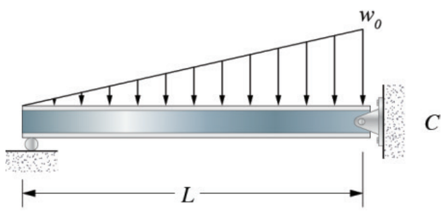
4) จงคำนวณหาระยะการขจัดของจุด B บนคานอะลูมิเนียม 1014-T6 โดยใช้หลักการอนุรักษ์พลังงาน

5) จงคำนวณหาระยะการขจัดในแนวดิ่งของจุด B ในแต่ละชิ้นส่วนเหล็ก A-36 ที่มีหน้าตัดเท่ากันคือ 2 in.2 ใช้หลักการของงานเสมือน



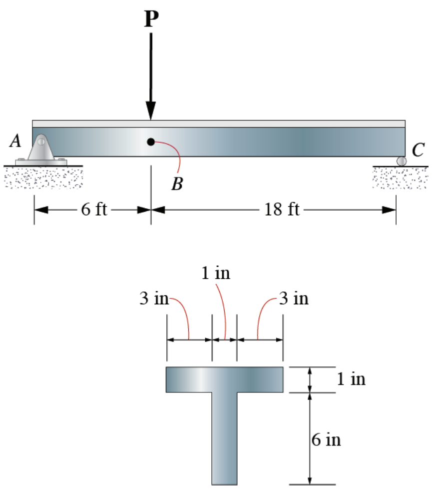


รูปแบบฝึกหัดข้อ 1)

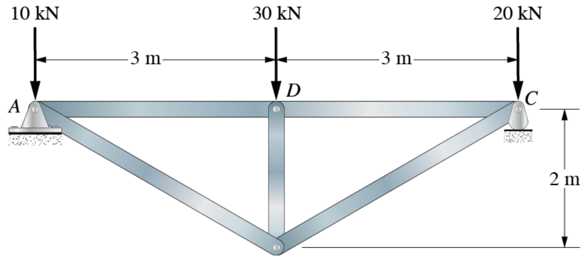


รูปแบบฝึกหัดข้อ 2)

รูปแบบฝึกหัดข้อ 3)



รูปแบบฝึกหัดข้อ 4)



รูปแบบฝึกหัดข้อ 5)

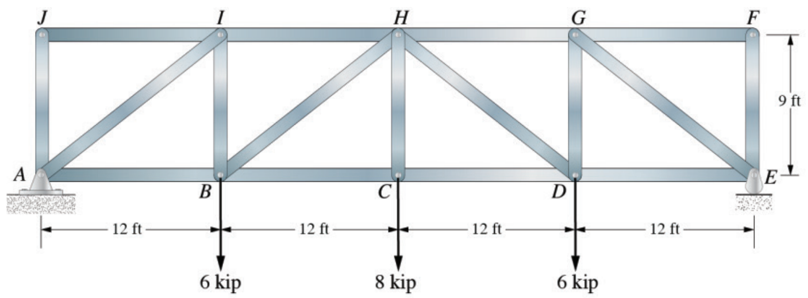
6) โจงคำนวณหาระยะการขจัดในแนวดิ่งของจุด C ในแต่ละชิ้นส่วนทำจากเหล็ก A-36 ที่มีหน้าตัดเท่ากับ 4.5 in.^{2} ใช้หลักการของงานเสมือน

7) จงคำนวณหาระยะการขจัดของจุด C และค่าความชันที่จุด B เมื่อ EI เป็นค่าคงที่ ใช้หลักการของงานเสมือน

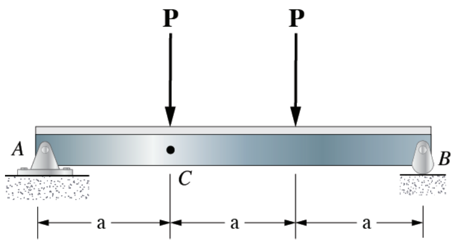
8) จงคำนวณหาระยะการขจัดและค่าความชันของจุด C เมื่อ EI เป็นค่าคงที่ ใช้หลักการของงานเสมือน

9) คานทำจากไม้สนดังแสดงในรูป จงคำนวณหาค่าความชันที่จุด A ใช้หลักการของงานเสมือน

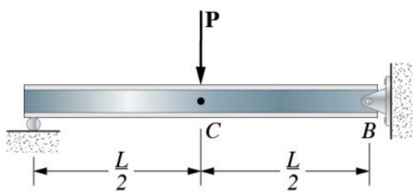
10) คานทำจากไม้โอ๊คที่มีค่า Eo = 11 GPa ดังแสดงในรูป จงคำนวณหาค่าความชันและระยะขจัดที่จุด A ใช้หลักการของงานเสมือน



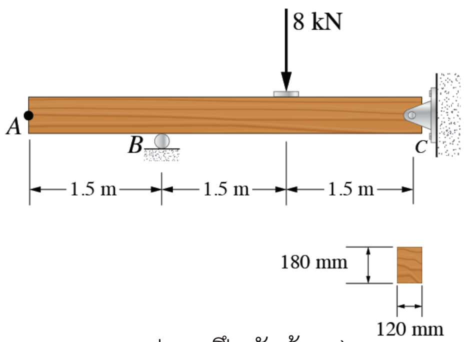
รูปแบบฝึกหัดข้อ 6)



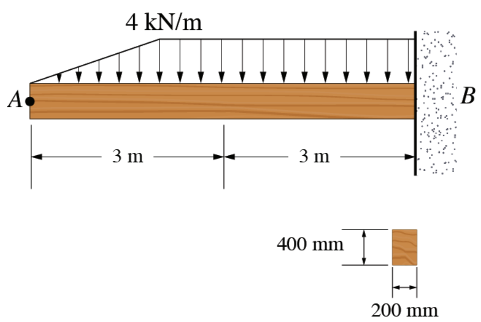
รูปแบบฝึกหัดข้อ 7)



รูปแบบฝึกหัดข้อ 8)



รูปแบบฝึกหัดข้อ 9)



รูปแบบฝึกหัดข้อ 10)

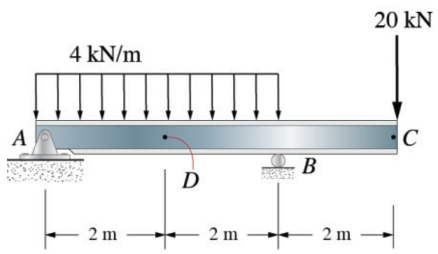
11) จงคำนวณหาระยะการขจัดที่จุด C ของคานที่ทำจากเหล็ก A-36 และมีค่า I = 36.9 (10^6) mm^4 ดังแสดงในรูป ใช้หลักการของงานเสมือน

12) คาน AB มีหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 100 mm แท่ง CD มีเส้นผ่านศูนย์กลาง 10 mm ถ้าทั้งสองชิ้นส่วนทำจากเหล็ก A-36 จงคำนวณหาระยะการขจัดในแนวดิ่งที่จุด B และค่าความชันที่จุด A เมื่อถูกแรงกระทำดังแสดงในรูป ใช้หลักการของงานเสมือน

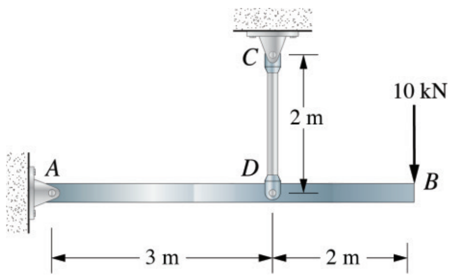
13) แท่ง ABC มีหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด 300 mm × 100 mm แท่ง DB มีเส้นผ่านศูนย์กลาง 20 mm ถ้าทั้งสองชิ้นส่วนทำจากเหล็ก A-36 จงคำนวณหาระยะการขจัดในแนวดิ่งของจุด C โดยพิจารณาผลของโมเมนต์ดัดในคาน ABC และผลของแรงตามแนวแกน DB ใช้หลักการของงานเสมือน

14) จงคำนวณหาระยะการขจัดในแนวราบของจุด C เมื่อ EI เป็นค่าคงที่ฐานรองรับที่จุด A เป็นแบบยึดติดแน่น พิจารณาเฉพาะผลของโมเมนต์ดัดเท่านั้น ใช้หลักการของงานเสมือน

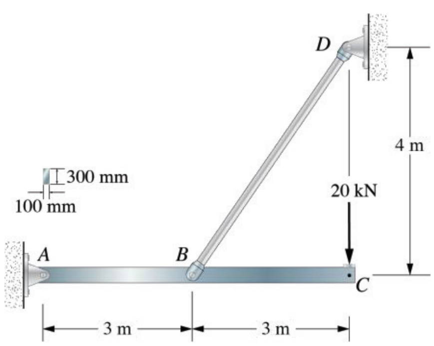
15) โครงกรอบประกอบด้วยชิ้นส่วนย่อยทั้งสองแต่ละชิ้นส่วนยาว L และมีค่าความแข็งแกร่ง EI ถ้าโครงกรอบถูกกระทำด้วยแรงกระจายแบบสม่ำเสมอ จงคำนวณหาระยะการขจัดในแนวดิ่งของจุด C และระยะการขจัดในแนวราบของจุด B โดยพิจารณาเฉพาะผลของโมเมนต์ดัดเท่านั้น ใช้หลักการของงานเสมือน



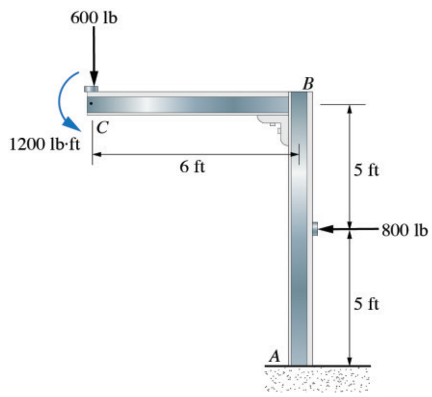
รูปแบบฝึกหัดข้อ 11)



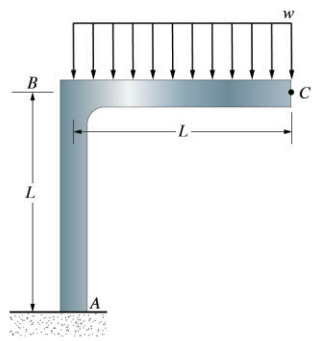
รูปแบบฝึกหัดข้อ 12)



รูปแบบฝึกหัดข้อ 13)



รูปแบบฝึกหัดข้อ 14)



รูปแบบฝึกหัดข้อ 15)

16) จงแก้ปัญหาโจทย์ข้อที่ 5 โดยใช้ทฤษฎีของคาสทีเกียรโน

17) จงแก้ปัญหาโจทย์ข้อที่ 6 โดยใช้ทฤษฎีของคาสทีเกียรโน

18) จงแก้ปัญหาโจทย์ข้อที่ 7 โดยใช้ทฤษฎีของคาสทีเกียรโน

19) จงแก้ปัญหาโจทย์ข้อที่ 9 โดยใช้ทฤษฎีของคาสทีเกียรโน

20) จงแก้ปัญหาโจทย์ข้อที่ 11 โดยใช้ทฤษฎีของคาสทีเกียรโน

21) จงแก้ปัญหาโจทย์ข้อที่ 13 โดยใช้ทฤษฎีของคาสทีเกียรโน

บทที่ 9
ทฤษฎีของการแตกหัก

9.1 บทนำ

ในการออกแบบโดยใช้วัสดุที่แตกต่างกันและพฤติกรรมที่หลากหลายจะต้องกำหนดขีดจำกัดสูงสุดบนสภาวะของหน่วยแรงที่จะทำให้เกิดการแตกหักของวัสดุ ถ้าวัสดุมีความเหนียว การแตกหักโดยทั่วไปจะกำหนดโดยพิจารณาความเค้นที่จุดคราก ในขณะที่วัสดุเปราะจะกำหนดที่ความเค้นสูงสุดก่อนการแตกหัก เราจะสังเกตการแตกหักได้ไม่ยากเกินไปจากลักษณะของการแตกหักจะเกิดขึ้นถ้าชิ้นส่วนถูกกระทำด้วยแรงตามแนวแกนเดียวหรือโมเมนต์ดัดรวมแกนเดียว ดังเช่นในกรณีที่ทำการดึงอย่างง่าย อย่างไรก็ตามถ้าชิ้นส่วนถูกกระทำด้วยหน่วยแรงตามแนวแกนสองแกนหรือสามแกน จุดวิกฤตของการแตกหักจะมีความยุ่งยากมากยิ่งขึ้นในการพิจารณา

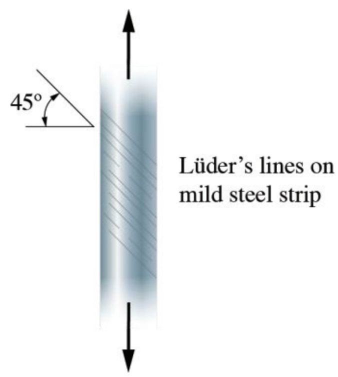
ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึง 4 ทฤษฎีที่นิยมใช้ในการปฏิบัติในเชิงวิศวกรรม เพื่อทำนายจุดแตกหักของวัสดุที่ถูกกระทำด้วยสภาวะของแรงตามแนวแกนหลายแกนของหน่วยแรงดัดรอบหลายแกน ทฤษฎีดังกล่าวนี้ ได้แก่ 1) ทฤษฎีหน่วยแรงเฉือนที่มีค่ามากที่สุด 2) ทฤษฎีพลังงานบิดที่มีค่ามากที่สุด 3) ทฤษฎีหน่วยแรงตั้งฉากปกติที่มีค่ามากที่สุด และ 4) ทฤษฎีจุดวิกฤติของการแตกหักของโมห์ จะใช้หาหน่วยแรงที่ยอมรับได้ที่อยู่ในมาตรฐานการออกแบบต่างๆ ไม่มีทฤษฎีของการแตกหักใดที่สามารถประยุกต์ใช้กับวัสดุได้ทุกชนิด เนื่องจากวัสดุที่แตกต่างกันอาจมีพฤติกรรมมีความเหนียวหรืออาจจะเปราะขึ้นอยู่กับอุณหภูมิ อัตราการกระทำของแรง สภาพแวดล้อมทางเคมี หรือวิธีการที่วัสดุขึ้นรูป เมื่อใช้ทฤษฎีของการแตกหัก เริ่มแรกจำเป็นต้องคำนวณหาองค์ประกอบของหน่วยแรงตั้งฉากปกติ และหน่วยแรงเฉือนที่จุดที่มีค่ามากที่สุดในชิ้นส่วน ซึ่งจะใช้พื้นฐานของกลศาสตร์ของวัสดุและประยุกต์การใช้แฟคเตอร์ของหน่วยแรง องค์ประกอบของหน่วยแรงที่มากที่สุดสามารถหาได้ โดยใช้การวิเคราะห์ทางคณิตศาสตร์บนพื้นฐานทฤษฎีของความยืดหยุ่นหรือโดยการใช้เทคนิคของการทดสอบที่มีความเหมาะสม ในกรณีใดๆ เมื่อสภาวะของหน่วยแรงนี้ได้เกิดขึ้น จะสามารถหาค่าหน่วยแรงหลักที่จุดวิกฤตดังกล่าวนี้ได้ เนื่องจากแต่ละทฤษฎีมีพื้นฐานเดียวกันคือจะต้องทราบค่าของหน่วยแรงหลัก

ในทฤษฎีที่จะกล่าวในรายละเอียดต่อไป การใช้งานของแต่และทฤษฎีมีสมมติฐานที่แตกต่างกันไป โดยในทฤษฎี 1) ทฤษฎีหน่วยแรงเฉือนที่มีค่ามากที่สุด และ 2) ทฤษฎีพลังงานบิดที่มีค่ามากที่สุดเหมาะสำหรับการวิเคราะห์การแตกหักของวัสดุเหนียว (ductile materials) ซึ่งสังเกตวัสดุเหล่านี้เบื้องต้นจากสมบัติวัสดุคือวัสดุที่มีจุดครากจะมีพฤติกรรมยืดตัวก่อนจะแตกหักที่จุดสูงสุด เช่น เหล็ก อลูมิเนียม และทองแดง เป็นต้น อย่างไรก็ตามในทฤษฎี 3) ทฤษฎีหน่วยแรงตั้งฉากปกติที่มีค่ามากที่สุด และ 4) ทฤษฎีจุดวิกฤติของการแตกหักของโมห์ จะใช้งานสำหรับวัสดุเปราะ (brittle materials) ซึ่งเมื่อแรงกระทำต่อวัสดุจะเกิดการแตกหักแบบทันทีทันใด เช่น คอนกรีต เหล็กหล่อ เป็นต้น

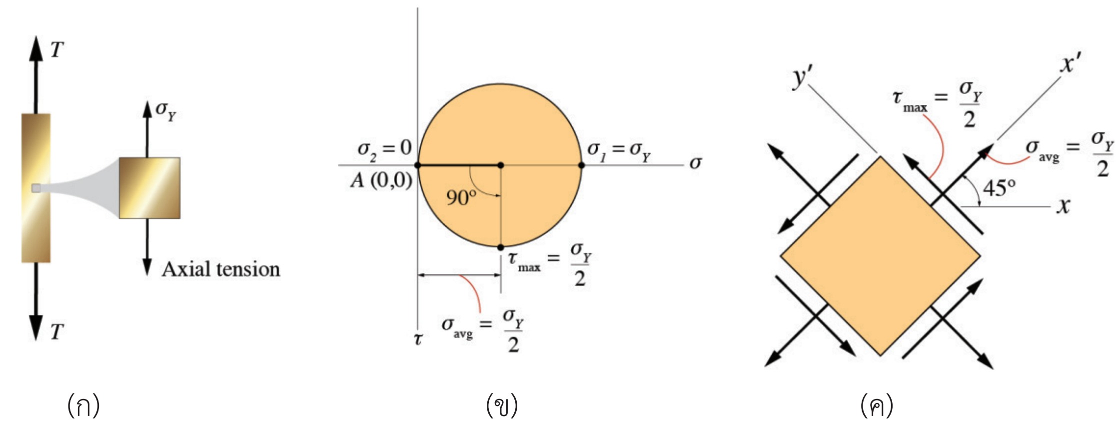
9.2 ทฤษฎีหน่วยแรงเฉือนที่มีค่ามากที่สุด

ทฤษฎีหน่วยแรงเฉือนที่มีค่ามากที่สุด (maximum-shear-stress theory) โดยทั่วไปการคราก ของวัสดุเหนียว คือ การลื่นไหลซึ่งเกิดตามระนาบสัมผัสของผลึกที่เรียงตัวกันแบบสุ่มที่อยู่ในวัสดุ การลื่นไถลนี้เกิดขึ้นเนื่องจากหน่วยแรงเฉือน และถ้าชิ้นส่วนของแถบยางถูกนำไปทดสอบการรับแรงดึง อย่างง่าย สามารถเห็นลักษณะของวัสดุได้ว่าเกิดการคราก ดังแสดงในรูปที่ 9-1 ขอบของระนาบการลื่น ไถลที่แสดงบนพื้นผิวของแถบที่อ้างอิงด้วยแนวเส้นลูเดอร์ (Luder's Lines) แนวเส้นนี้จะเห็นได้ชัดและ บ่งบอกระนาบที่เกิดการลื่นไถลในแถบที่เกิดขึ้นนี้มีค่าประมาณมุม 45° กับแกนของแถบ

พิจารณาชิ้นส่วนของวัสดุคิดจากตัวอย่างรับแรงดึงดังแสดงในรูปที่ 9-2 ซึ่งถูกกระทำด้วยแรงคราก σ_y หน่วยแรงเฉือนที่มากที่สุดสามารถหาได้โดยการวาดวงกลมของโมห์ของชิ้นส่วน ดังแสดงในรูปที่ 9-2 ผลลัพธ์จะบ่งบอกว่า



รูปที่ 9-1 ชิ้นส่วนของแถบยางถูกนำไปทดสอบการรับแรงดึงอย่างง่าย



รูปที่ 9-2 การวิเคราะห์ชิ้นส่วนของวัสดุคิดจากการรับแรงดึง

นอกจากนั้นหน่วยแรงเฉือนนี้ยังกระทำบนระนาบที่มีการเอียงทำมุม 45° วัดจากระนาบของหน่วยแรงหลัก ดังแสดงในรูปที่ 9-2 และระนาบนี้จะขนานกับทิศทางของแนวเส้นลูเดอร์ ดังแสดงบนตัวอย่าง ซึ่งเป็นการแตกหักที่เกิดขึ้นโดยการเฉือน

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_y}{2} \qquad (9\text{-}1)$$

โดยการใช้ข้อมูลนี้ วัสดุเหนียวจะเกิดการแตกหักเนื่องจากการเฉือน ในปี ค.ศ. 1868 เฮนรี่ เทสคา (Henri Tresca) เสนอทฤษฎีของหน่วยแรงเฉือนที่มีค่ามากที่สุดหรือจุดวิกฤตการครากของเทสคา ทฤษฎีนี้สามารถใช้ทำนายหน่วยแรงแตกหักของวัสดุเหนียวที่ถูกกระทำด้วยแรงกระทำชนิดต่างๆ ทฤษฎีหน่วยแรงเฉือนที่มีค่ามากที่สุด กล่าวว่าการครากของวัสดุเริ่มต้นเมื่อหน่วยแรงเฉือนที่มีค่ามากที่สุดอย่างสัมบูรณ์ในวัสดุ มีค่าถึงหน่วยแรงเฉือนที่ทำให้วัสดุเหมือนกันเกิดการครากเมื่อถูกกระทำเพียงแรงดึงตามแนวแกน เพื่อหลีกเลี่ยงการแตกหัก ดังนั้น ทฤษฎีหน่วยแรงเฉือนที่มีค่ามากที่สุดค่า τ_{abs} ในวัสดุที่มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ $\frac{\sigma_y}{2}$ เมื่อ σ_y ได้จากการทดสอบการรับแรงดึงอย่างง่าย

สำหรับการประยุกต์ใช้ จะแสดงหน่วยแรงเฉือนที่มีค่ามากที่สุดอย่างสัมบูรณ์ในรูปของหน่วยแรงหลัก เทียบกับเงื่อนไขของหน่วยแรงในระนาบ นั่นคือ เมื่อหน่วยแรงหลักนอกระนาบมีค่าเป็นศูนย์ ถ้าหน่วยแรงหลักในระนาบทั้งหมดมีเครื่องหมายเหมือนกัน นั่นคือ เป็นหน่วยแรงดึงทั้งคู่แรงอัดทั้งคู่ หรือเป็นหน่วยแล้วการแตกหักจะเกิดขึ้นภายนอกแนวของระนาบจากสมการ

$$\tau_{\underset{max}{abs}} = (\tau_{x'z'})_{max} = \frac{\sigma_{max} - 0}{2} = \frac{\sigma_{max}}{2}$$

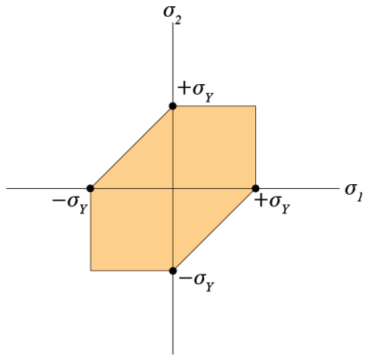
จะได้ว่า

$$\tau_{\underset{max}{abs}} = \frac{\sigma_{max}}{2}$$

หรือพูดอีกนัยหนึ่งว่า ถ้าหน่วยแรงหลักในระนาบมีเครื่องหมายตรงกันข้ามแล้วการแตกหักที่เกิดขึ้นจะเกิดในแนวระนาบจากสมการ

$$\tau_{\underset{max}{abs}} = (\tau_{x'y'})_{max} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$$

ใช้สมการนี้และสมการที่ 9-1 ทฤษฎีหน่วยแรงเฉือนที่มีค่ามากที่สุดสำหรับหน่วยแรงในระนาบจะแสดง สำหรับหน่วยสองหน่วยแรงหลักในระนาบใดๆ σ_1 และ σ_2 โดยเงื่อนไขต่อไปนี้



รูปที่ 9-3 กราฟของหน่วยแรงเฉือนที่มีค่ามากที่สุดสำหรับหน่วยแรงในระนาบ

$$\left.\begin{matrix}|\sigma_1| = \sigma_y \\ |\sigma_2| = \sigma_y\end{matrix}\right\}\sigma_1, \sigma_2 \qquad \text{มีลักษณะเครื่องหมายเหมือนกัน}$$

$$|\sigma_1 - \sigma_2| = \sigma_y\} \ \sigma_1, \sigma_2 \ \text{มีลักษณะเครื่องหมายตรงข้ามกัน} \tag{9-2}$$

กราฟของสมการดังกล่าวนี้จะแสดงในรูปที่ 9-3 เห็นได้ชัดว่า ถ้าจุดใดๆ ของวัสดุถูกกระทำด้วยหน่วยแรงในระนาบ และหน่วยแรงหลักในระนาบจะแทนด้วยพิกัด (σ_1, σ_1) วาดบนขอบเขตหรือภายนอกพื้นที่รูปหกเหลี่ยมแรเงาจะแสดงในรูปนี้ วัสดุที่จะครากที่จุดและการแตกหักจะเกิดขึ้น

9.3 ทฤษฎีพลังงานบิดที่มีค่ามากที่สุด

ทฤษฎีพลังงานบิดที่มีค่ามากที่สุด (maximum-distortion-energy theory) วัสดุเมื่อเปลี่ยนแปลงรูปร่างเนื่องจากมีแรงกระทำภายนอกมากระทำ จะมีแนวโน้มที่จะเก็บพลังงานภายในตลอดทั้งปริมาตรของวัสดุพลังงานต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรของวัสดุจะเรียกกันว่าความหนาแน่นของพลังงานความเครียด และถ้าวัสดุถูกกระทำด้วยแรงตามแนวแกนเดียว ความหนาแน่นของพลังงานความเครียด นิยามโดยสมการ $u = \frac{\Delta U}{\Delta V} = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon$ สามารถเขียนใหม่ได้ว่า

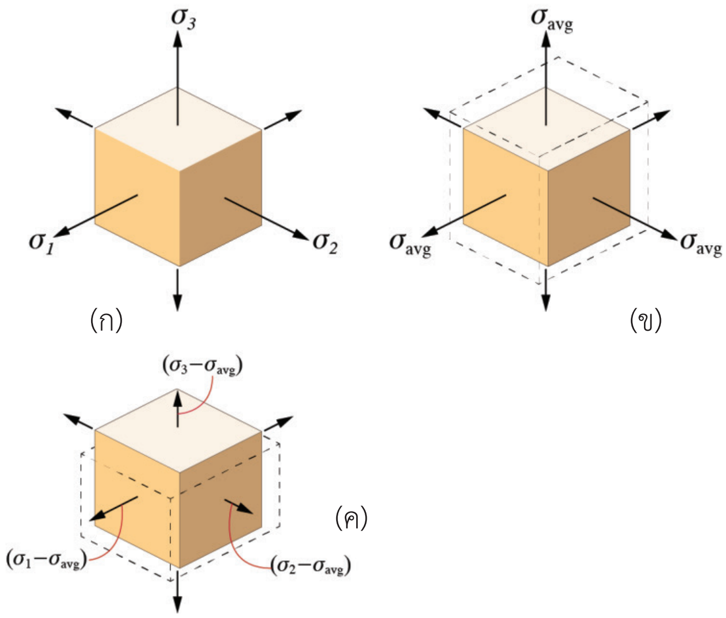
$$u = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon \tag{9-3}$$

เป็นไปได้ที่จะสร้างสมการของจุดวิกฤตของการแตกหักบนพื้นฐานของทฤษฎีพลังงานทำให้เกิดการบิดตัว อย่างไรก็ตามจะหาความหนาแน่นพลังงานของความเครียดในชิ้นส่วนเชิงปริมาตรของวัสดุที่ถูกกระทำด้วยหน่วยแรงหลักทั้งสาม ดังแสดงในรูปที่ 9-4 เมื่อแต่ละหน่วยแรงหลักทำให้เกิดส่วนของความหนาแน่นพลังงานความเครียดทั้งหมด ดังนั้น

$$u = \frac{1}{2}\sigma_1\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\sigma_2\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\sigma_3\varepsilon_3$$

ถ้าวัสดุมีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นเชิงเส้น แล้วสามารถใช้กฎของฮุคได้ ดังนั้นแทนค่าลงในสมการข้างต้นทำการจัดให้อยู่ในรูปอย่างง่ายจะได้ว่า

$$u = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^{\ 2} + \sigma_2^{\ 2} + \sigma_3^{\ 2} - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)\right] \tag{9-4}$$



รูปที่ 9-4 การหาความหนาแน่นพลังงานของความเครียดในชิ้นส่วนเชิงปริมาตรของวัสดุที่ถูกกระทำด้วยหน่วยแรงหลักทั้งสาม

ความหนาแน่นของพลังงานความเครียดนี้ สามารถพิจารณาเป็นผลรวมของสองส่วน ส่วนแรกแทนพลังงานที่ต้องการทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงปริมาตรของชิ้นส่วนที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงรูปทรง และอีกส่วนแทนพลังงานที่ต้องการเพื่อบิดชิ้นส่วนให้เสียรูปทรง โดยเฉพาะอย่างยิ่งพลังงานเก็บในชิ้นส่วนเป็นผลของการเปลี่ยนแปลงปริมาตรที่เกิดขึ้นโดยการกระทำของหน่วยแรงหลักเฉลี่ย $\sigma_{avg} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$ เนื่องจากหน่วยแรงนี้เกิดจากความเครียดหลักและมีค่าเท่ากันในวัสดุดังแสดงในรูปที่ 9-4 ส่วนของหน่วยแรงคงค้าง $(\sigma_1 - \sigma_{avg})$ $(\sigma_2 - \sigma_{avg})$ $(\sigma_3 - \sigma_{avg})$ ทำให้เกิดพลังงานซึ่งทำให้เกิดการบิดดังแสดงในรูปที่ 9-4

จากหลักฐานการทดสอบจะทราบว่าวัสดุไม่ครากเมื่อถูกกระทำด้วยหน่วยแรง (ไฮดรอสเตติก) อย่างสม่ำเสมอ นั่นคือ σ_{avg} ที่กล่าวมาแล้วข้างต้น ใน ค.ศ. 1904 เอ็ม ฮิวเบอร์ (M. Huber) เสนอว่าการครากในวัสดุจะเกิดขึ้นเมื่อพลังงานที่ทำให้เกิดการบิดตัวต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรของวัสดุเท่ากับ หรือเกินพลังงานที่ทำให้เกิดการบิดตัวต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรของวัสดุชนิดเดียวกัน เมื่อถูกทำให้เกิดการครากในการทดสอบการรับแรงดึงอย่างง่ายทฤษฎีนี้ เรียกว่า ทฤษฎีพลังงานที่ทำให้เกิดการบิดตัวที่มีค่ามากที่สุด และเนื่องจากทฤษฎีนี้ได้ถูกนิยามอีกครั้งหนึ่งอย่างอิสระโดย อาร์ วอน มิส (R. von Mises) และเอช เฮนกี (H. Hencky)

เพื่อให้ได้พลังงานที่ทำให้เกิดการบิดตัวต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร จะแทนค่าหน่วยแรงด้วย $(\sigma_1 - \sigma_{avg}),(\sigma_2 - \sigma_{avg}),(\sigma_3 - \sigma_{avg})$ สำหรับ $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ตามลำดับ ในสมการที่ 9-4 พึงตระหนักว่า $\sigma_{avg} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$ กระจายเทอมและจัดให้อยู่ในรูปอย่างง่าย จะได้ว่า

$$u_d = u_d = \frac{1+v}{6E}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]$$

ในกรณีของหน่วยแรงในระนาบ $\sigma_3 = 0$ และสมการนี้ลดรูปลงเหลือเพียง

$$u_d = \frac{1+v}{3E}(\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)$$

สมการนี้เป็นสมการของรูปโค้งวงรี ดังแสดงในรูปที่ 9-5 ดังนั้น ถ้าจุดในวัสดุที่ถูกหน่วยแรงกระทำซึ่งพิกัดของหน่วยแรง (σ_1, σ_2) อยู่นอกขอบเขตหรือพื้นที่แรเงา วัสดุจะเกิดการพัง

การเปรียบเทียบจุดวิกฤตของการแตกหักทั้งสองวิธีข้างต้น ดังแสดงในรูปที่ 9-6 พบว่าทั้งสองทฤษฎีจะให้ผลที่คล้ายคลึงกันเมื่อหน่วยแรงหลักมีค่าเท่ากัน นั่นคือจากสมการที่ 9-2 และ 9-5 ค่าของ $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_y$ หรือเมื่อหน่วยแรงหลักค่าหนึ่งมีค่าเป็นศูนย์และค่าอื่นๆ ขนาด σ_y หรือพูดอีกนัยหนึ่งว่าถ้าวัสดุถูกกระทำด้วยการเฉือนเพียงอย่างเดียวคือค่า τ แล้วทฤษฎีจะให้ค่าที่แตกต่างกันมากในการทำนายพฤติกรรมการแตกหัก พิกัดของหน่วยแรงของจุดดังกล่าวนี้บนรูปโค้งจะคำนวณได้ โดยพิจารณาชิ้นส่วนดังแสดงในรูปที่ 9-7 จากวงกลมของโมห์ที่สอดคล้องกันกับสภาวะของหน่วยแรง ดังแสดงในรูปที่ 9-7 จะได้หน่วยแรงหลัก $\sigma_1 = \tau, \sigma_2 = -\tau$ ประยุกต์ใช้สมการที่ 9-2 และ 9-5 ทฤษฎีหน่วยแรงเฉือนที่มีค่ามากที่สุด และทฤษฎีพลังงานที่ทำให้เกิดการบิดตัวที่มีค่ามากที่สุด จะได้ $\sigma_1 = \sigma_y/2$ และ $\sigma_1 = \sigma_y/\sqrt{3}$ ตามลำดับ ดังแสดงในรูปที่ 9-6

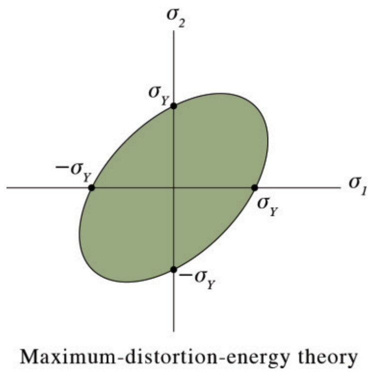
การทดสอบหาค่าการบิดที่แท้จริง จะถูกนำมาใช้ในกรณีของการเฉือนอย่างเดียวในตัวอย่างของเหล็กเหนียว แสดงว่าทฤษฎีพลังงานทำให้เกิดการบิดตัวที่มีค่ามากที่สุดจะให้ผลลัพธ์ถูกต้องมากกว่าทฤษฎีหน่วยแรงเฉือนที่มีค่ามากที่สุด เนื่องจาก $(\sigma_y/\sqrt{3})/(\sigma_y/2) = 1.15$ หน่วยแรงเฉือนสำหรับการครากของวัสดุจะกำหนดโดยทฤษฎีพลังงานที่ทำให้เกิดการบิดตัวที่มีค่ามากที่สุด มีค่าความถูกต้องมากกว่าค่าที่ได้จากทฤษฎีหน่วยแรงเฉือนที่มีค่ามากที่สุดถึงร้อยละ 15

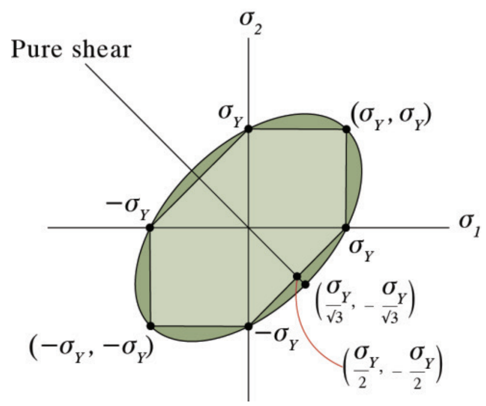
สำหรับการทดสอบการรับแรงดึงตามแนวแกนเดียว $\sigma_1 = \sigma_y, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ และแล้วพลังงานทำให้เกิดการบิดตัวจะกลายเป็น

$$(u_d)_y = \frac{1+v}{3E}\sigma_y^2$$

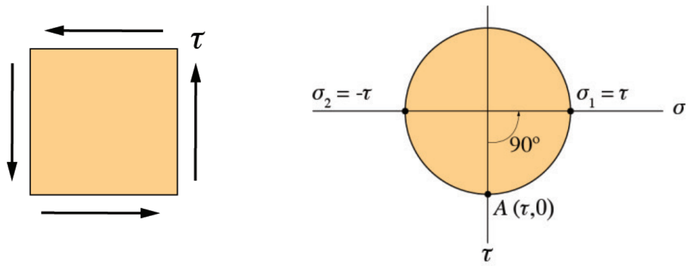
เนื่องจากทฤษฎีพลังงานที่ทำให้เกิดการบิดตัวที่มีค่ามากที่สุด ต้องการ $u_d = (u_d)_y$ แล้วสำหรับกรณีของหน่วยแรงในระนาบหรือตามแนวแกนสองแกน จะได้ว่า

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_y^2 \qquad (9\text{-}5)$$





รูปที่ 9-5 ขอบเขตของทฤษฎี รูปที่ 9-6 การเปรียบเทียบจุดวิกฤติของการแตกหักทั้งสองวิธี



รูปที่ 9-7 การพิจารณาชิ้นส่วนจากวงกลมของโมห์ที่สอดคล้องกันกับสภาวะของหน่วยแรง

9.4 ทฤษฎีหน่วยแรงตั้งฉากปกติที่มีค่ามากที่สุด

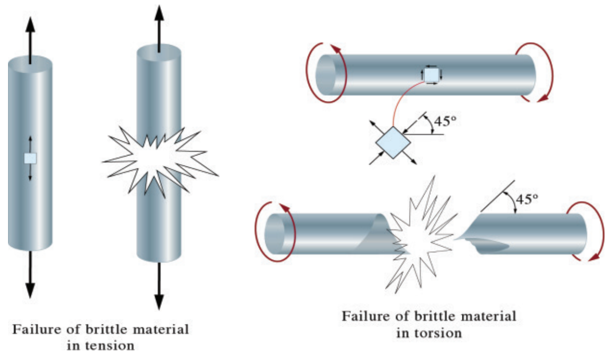
ทฤษฎีหน่วยแรงตั้งฉากปกติที่มีค่ามากที่สุด (maximum-normal-stress theory) เห็นได้ชัดว่าวัสดุเปราะอย่างเช่นเหล็กหล่อสีเทา มีแนวโน้มที่จะเกิดการแตกหักในทันทีโดยการแตกหักที่ไม่มีการครากปรากฏขึ้น ในการทดสอบการรับแรงดึง การแตกหักจะเกิดขึ้นเมื่อหน่วยแรงตั้งฉากปกติมีค่าถึงหน่วยแรงประลัย σ_{ult} ดังแสดงในรูปที่ 9-8 นอกจากนั้นในการทดสอบการบิด การแตกหักแบบเปราะจะเกิดขึ้นเนื่องจากหน่วยแรงดึงมีค่ามากที่สุด เนื่องจากระนาบของการแตกหักสำหรับชิ้นส่วนอยู่ที่ 45° วัดจากทิศทางของหน่วยแรงเฉือนดังแสดงในรูปที่ 9-8 พื้นผิวของการแตกหักจะเป็นรูปเกลียว ดังแสดงในรูป การทดสอบจะแสดงต่อไปว่าระหว่างที่เกิดโมเมนต์บิดกำลังของวัสดุมีบางอย่างที่ไม่มีผลกระทบโดยหน่วยแรงอัดหลักที่สอดคล้องกันที่มุมขวามือกับหน่วยแรงดึงหลัก เนื่องจากหน่วยแรงดึงหลักมีค่าเท่ากันกับหน่วยแรงบิด เนื่องจากเหตุผลดังกล่าวมานี้ ทฤษฎีหน่วยแรงตั้งฉากปกติที่มีค่ามากที่สุดกล่าวว่าวัสดุที่เปราะจะแตกหักเมื่อหน่วยแรงหลักที่มีค่ามากที่สุด σ_1 ในวัสดุมีค่าเพิ่มขึ้นจนถึงขีดจำกัดที่เท่ากับหน่วยแรงประลัย ที่วัสดุจะทนได้เมื่อถูกกระทำด้วยแรงดึงอย่างง่าย

ถ้าวัสดุถูกกระทำด้วยหน่วยแรงในระนาบ จะได้ว่า

$$|\sigma_1| = \sigma_{ult} \tag{9-6}$$

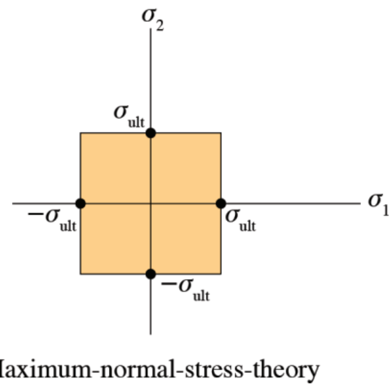
$$|\sigma_2| = \sigma_{ult}$$

สมการดังกล่าวนี้ แสดงในรูปเชิงกราฟฟิกดังแสดงในรูปที่ 9-9 พบว่าถ้าพิกัดของหน่วยแรง (σ_1, σ_2) ในวัสดุตกบนขอบเขตหรือภายนอกของพื้นที่ที่แรเงา วัสดุจะเกิดการแตกหัก ทฤษฎีคิดค้นโดย ดับบิว แรงค์กิล (W. Rankine) ในปี ค.ศ. 1800 การทดสอบพบว่าพฤติกรรมของวัสดุเปราะที่บริเวณผิวของวัสดุ ค่าหน่วยแรงและค่าความเครียดจะมีค่าเท่ากันทั้งกรณีรับแรงดึงและกรณีรับแรงอัด



(ก) (ข)

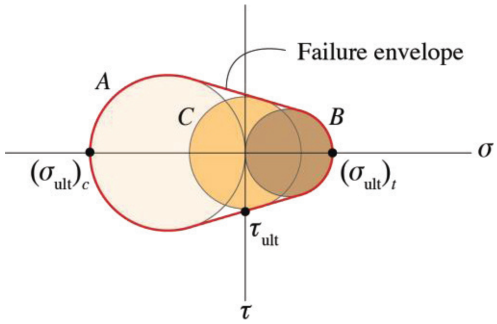
รูปที่ 9-8 การวิเคราะห์วัสดุเปราะ



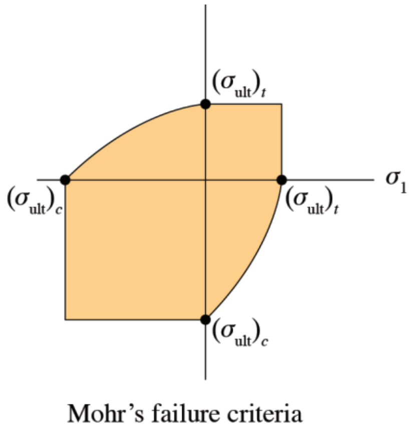
รูปที่ 9-9 สมการแสดงในรูปเชิงกราฟิก

9.5 จุดวิกฤตของการแตกหักของโมห์

จุดวิกฤตของการแตกหักของโมห์ (Mohr's Failure Criterion) ในวัสดุเปราะบางอย่าง คุณสมบัติการรับแรงดึงและการรับแรงอัดมีค่าแตกต่างกัน เมื่อพฤติกรรมนี้เกิดขึ้นจุดวิกฤตที่อาศัยพื้นฐานการใช้วงกลมของโมห์อาจจะสามารถใช้ทำนายพฤติกรรมการแตกหักของวัสดุนี้ได้ วิธีการนี้พัฒนาโดยออตโต โมห์ (Otto Mohr) และบางครั้งเรียกกันว่า วิกฤตการแตกหักของโมห์ เมื่อประยุกต์ใช้เริ่มแรกจะทำการทดสอบเพื่อหาค่าคำนวณแรงบนวัสดุทั้งสามค่า การทดสอบการรับแรงดึงตามแนวแกนเดียวและการทดสอบการรับแรงอัดตามแนวแกนเดียวจะใช้หาหน่วยแรงดึงและหน่วยแรงอัดประลัย (σ_{ult}) และ $(\sigma_{ult})_c$ ตามลำดับ นอกจากนั้นการรับโมเมนต์บิดเพื่อหาหน่วยแรงเฉือนประลัย τ_{ult} วงกลมของโมห์ในแต่ละเงื่อนไขหน่วยแรงนี้สามารถแสดงในรูปที่ 9-10 วงกลม A แทนเงื่อนไขของหน่วยแรงที่ว่า $\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -(\sigma_{ult})_c$ วงกลม B แทนเงื่อนไขของหน่วยแรงที่ว่า $\sigma_1 = (\sigma_{ult})_t, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ วงกลม C แทนเงื่อนไขในกรณีรับหน่วยแรงเฉือนอย่างเดียว เกิดโดย τ_{ult} วงกลมทั้งสามนี้จะมีการเกิดการแตกหักซึ่งบ่งบอกได้โดยรูปโค้งที่แรเงา ซึ่งอยู่ในแนวเส้นสัมผัสผิวของวงกลมทั้งสาม ถ้าพิกัดของหน่วยแรงและหน่วยแรงเฉือนอยู่นอกเส้นสัมผัสของแนวเส้นสัมผัสของวงกลม วัสดุจะไม่แตกหัก



รูปที่ 9-10 การรับโมเมนต์บิดเพื่อหาหน่วยแรงเฉือนประลัย τ_{ult} วงกลมของโมห์ในแต่ละเงื่อนไข

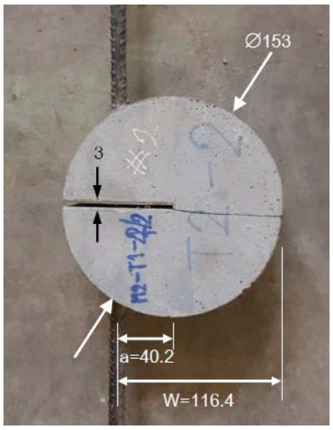


รูปที่ 9-11 กราฟของหน่วยแรงหลัก

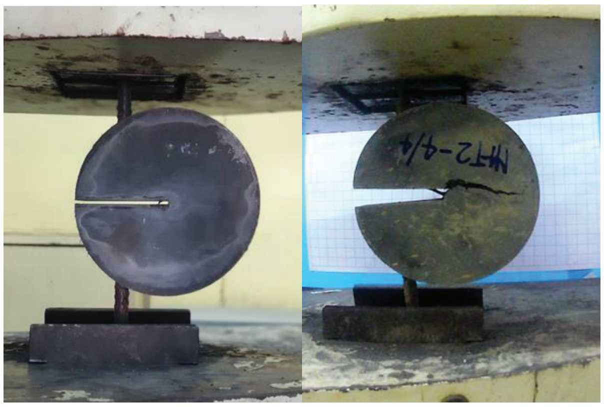
เมื่อแทนวิกฤตนี้ บนกราฟของหน่วยแรงหลัก $\sigma_1, \sigma_2 (\sigma_3 = 0)$ ซึ่งแสดงในรูปที่ 9-11 การแตกหักเกิดขึ้นเมื่อค่าสัมบูรณ์ของหน่วยแรงหลักมีค่าเท่ากับหรือมากกว่า (σ_{ult})t หรือ (σ_{ult})c หรือโดยทั่วไป ถ้าสภาวะของหน่วยแรงที่จุดที่ถูกนิยามโดยพิกัด (σ_1, σ_2) ที่วาดบนกราฟหรือภายนอกพื้นที่แรเงา

วิกฤตทั้งสองข้างต้นสามารถใช้ในทางปฏิบัติ เพื่อทำนายการแตกหักของวัสดุเปราะ อย่างไรก็ตาม พึงตระหนักว่า ประโยชน์ดังกล่าวนี้มีจำกัด การแตกหักแบบดึงเกิดขึ้นในทันทีทันใด และการเริ่มต้นของการเกิดการแตกหักโดยทั่วไปขึ้นอยู่กับหน่วยแรงที่เกิดขึ้นที่จุดที่มีความบกพร่องเพียงเล็กๆ น้อยๆ ของวัสดุ นั่นคือ การจับตัวเป็นกลุ่มก้อน หรือมีช่องว่าง การเว้าแหว่งของพื้นผิว หรือบริเวณรอยแตกร้าวและความผิดปกติอื่นๆ มีแนวโน้มที่จะเกิดการเสียรูปเมื่อตัวอย่างถูกแรงกระทำด้วยแรงดึง

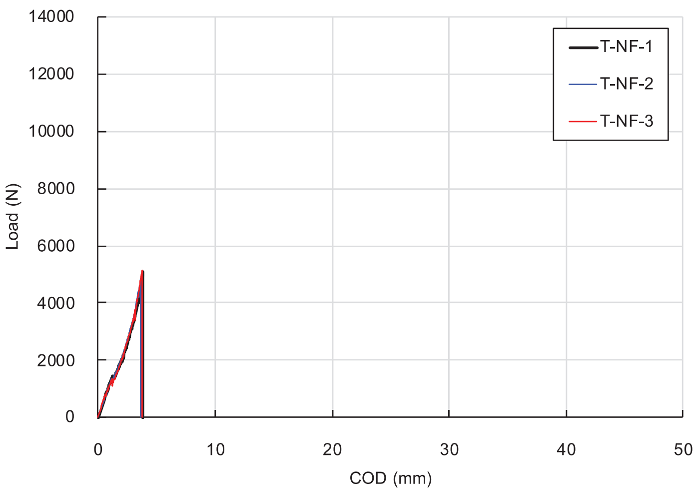
คอนกรีตเป็นวัสดุเปราะที่สอดคล้องกับทฤษฎีในหัวข้อ 9.4 และ 9.5 การทดสอบหาค่ากลสมบัติในห้องปฏิบัติการ เปรียบเทียบกับทฤษฎีดังกล่าวมีหลากหลายวิธี พฤติกรรมการแตกหักของคอนกรีตมีความซับซ้อน ดังนั้นกลศาสตร์การแตกหัก (fracture mechanics) เป็นอีกหัวข้อหนึ่งที่สำคัญของวัสดุ โดยวิธีการทดสอบหาพลังงานการแตกหัก (fracture energy) ของคอนกรีตที่นิยมใช้ในปัจจุบันคือ การทดสอบด้วยตัวอย่างคาน โดยมีแรงกระทำเป็นจุดที่กึ่งกลาง อย่างไรก็ตาม ยังมีวิธีใหม่ที่ใช้กับคอนกรีตรูปร่างเป็นแผ่นทรงกระบอก ดังรูปที่ 9-12 ถึง รูปที่ 9-14 ซึ่งการทดสอบดังกล่าวทำให้ทดสอบกับโครงสร้างที่ก่อสร้างไปแล้วได้ง่ายขึ้น จากการเตรียมตัวอย่างจากการเจาะแท่งตัวอย่าง (coring) จากโครงสร้างที่มีอยู่เดิม [8] ผลการทดสอบเป็นที่น่าพอใจสำหรับการประเมินหน่วยแรงประลัยของคอนกรีต



รูปที่ 9-12 ตัวอย่างการทดสอบการแตกหัก [8]



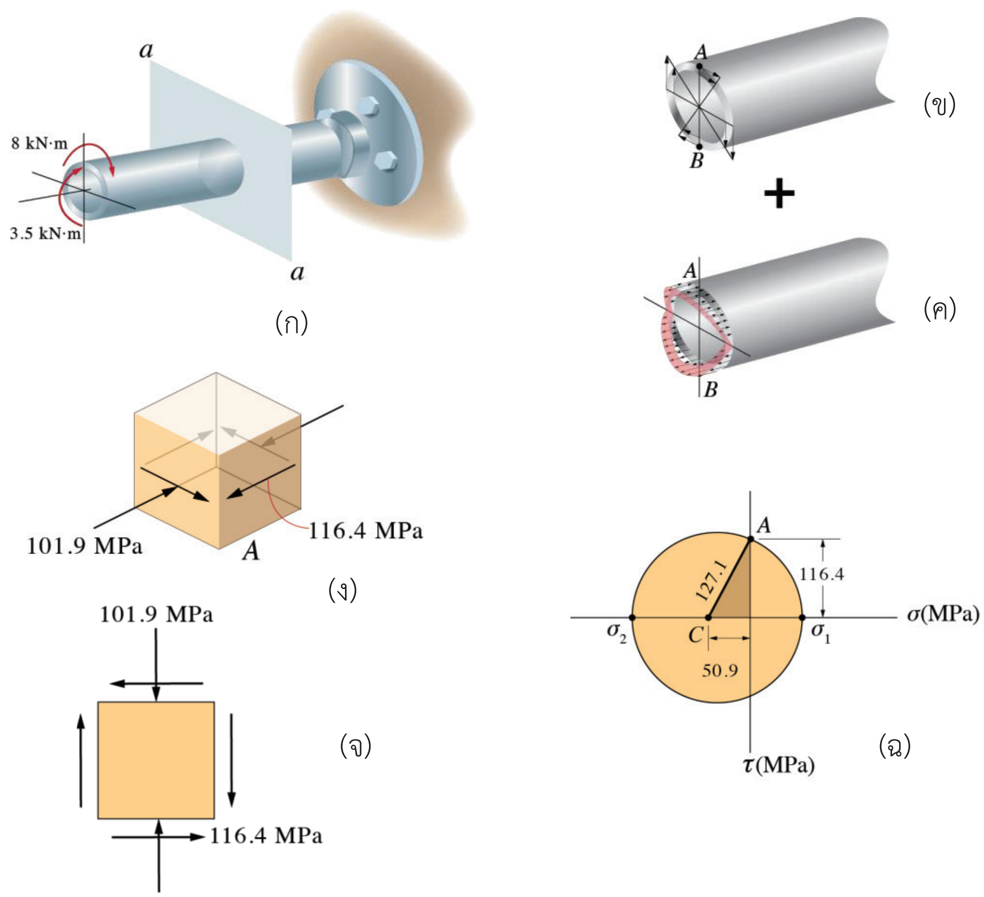
รูปที่ 9-13 การวิบัติของคอนกรีต [8]



รูปที่ 9-14 ผลการทดสอบหาหน่วยแรงประลัยของคอนกรีต [8]

<u>ตัวอย่างที่ 9.1</u>

ท่อเหล็กดังแสดงในรูป มีเส้นผ่านศูนย์กลาง 60 mm และเส้นผ่านศูนย์กลางภายนอก 80 mm ถ้าท่อถูกระทำด้วยโมเมนต์บิด 8 kN.m และโมเมนต์ตัด 3.5 kN.m จงตรวจสอบว่าแรงแระทำนี้ทำให้เกิดการพังโดยใช้นิยามจากทฤษฎีพลังงานที่เกิดการบิดตัวที่มีค่ามากที่สุด หน่วยแรงครากสำหรับเหล็กหาได้จากการทดสอบการรับดึง σ_y = 250 MPa



รูปตัวอย่างที่ 9.1

วิธีทำ

เพื่อแก้ปัญหานี้ วิเคราะห์จุดบนท่อที่ถูกกระทำด้วยสภาวะของหน่วยแรงวิกฤตที่มีค่ามากที่สุด โมเมนต์บิดและโมเมนต์ตัดกระทำอย่างสม่ำเสมอตลอดความยาวของท่อที่ภาคตัด a-a กำหนดไว้ในรูป (ก) แรงกระทำดังกล่าวนี้ทำให้เกิดการกระจายหน่วยแรงในรูป จากการตรวจสอบจุด A และ B ถูกกระทำด้วยสภาวะของหน่วยแรงวิกฤตเดียวกัน วิเคราะห์สภาวะของหน่วยแรงที่ A ดังนั้น

$$T_A = \frac{Tc}{J} = \frac{(800\ \mathrm{N\cdot m})(0.04\ \mathrm{m})}{(\pi/2)[(0.04\ \mathrm{m})^4 - (0.03\ \mathrm{m})^4]} = 116.4\ \mathrm{MPa}$$

$$\sigma_A = \frac{Mc}{I} = \frac{(3500\ \mathrm{N\cdot m})(0.04\ \mathrm{m})}{(\pi/4)[(0.04)^4 - (0.03\ \mathrm{m})^4]} = 101.9\ \mathrm{MPa}$$

ผลลัพธ์ดังกล่าวแสดงในรูปสามมิติของชิ้นส่วนของวัสดุที่จุด A ดังแสดงในรูป นอกจากนั้น เนื่องจากวัสดุถูกกระทำด้วยหน่วยแรงในระนาบ ซึ่งแสดงในรูปสองมิติ ดังแสดงในรูป

วงกลมของโมห์สำหรับสภาวะของหน่วยแรงในระนาบนี้จะมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่

$$\sigma_{avg} = \frac{0-101.9}{2} = -50.9\ \mathrm{MPa}$$

จุดอ้างอิง A (0-116.4 MPa) และวงกลมในรูป รัศมีสามารถคำนวณจากรูปสามเหลี่ยมที่แรเงาที่มีค่า R = 127.1 และหน่วยแรงในระนาบ คือ

$$\sigma_1 = -50.9 + 127.1 = 76.2\ \mathrm{MPa}$$

$$\sigma_2 = -50.9 - 127.1 = -178.0\ \mathrm{MPa}$$

โดยใช้สมการที่ 9-5 จะได้ว่า

$$(\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_y^2) \le \sigma_y^2$$

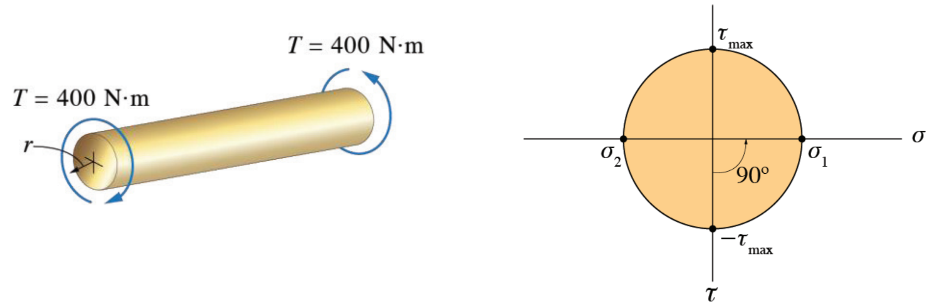
$$[(76.2^2) - (76.2)(-178.0) + (-178.0)^2] \overset{?}{\le} (250)^2$$

$$51100 < 62500 \qquad \text{OK}$$

เนื่องจากมีจุดวิกฤตของวัสดุภายในท่อไม่เกิดการคราก วัสดุจึงไม่พังพิสูจน์โดยใช้ทฤษฎีพลังงานที่เกิดจากการบิดตัวที่มีค่ามากที่สุด

ตัวอย่างที่ 9.2

เพลาเหล็กหล่อตันในรูป ถูกกระทำด้วยโมเมนต์บิด T = 400 N.m จงคำนวณหารัศมีที่เล็กที่สุดเพื่อที่ว่าเพลาจะไม่เกิดการแตกหักเนื่องจากทฤษฎีหน่วยแรงตั้งฉากปกติที่มีค่ามากที่สุด ตัวอย่างของเหล็กหล่อทดสอบการรับแรงดึงมีค่าหน่วยแรงประลัย $(\sigma_{ult})_t = 150$ MPa



รูปตัวอย่างที่ 9.2

วิธีทำ

ค่ามากที่สุดหรือหน่วยแรงวิกฤตเกิดขึ้นที่จุดอยู่บนพื้นผิวของเพลา สมมติว่าเพลามีรัศมี r หน่วยแรงเฉือน คือ

$$T_{max} = \frac{Tc}{J} = \frac{(400\ N\cdot m)r}{(\pi/2)r^4} = \frac{254.65\ N\cdot m}{r^3}$$

วงกลมของโมห์สำหรับสภาวะของหน่วยแรงนี้ (เกิดหน่วยแรงเพียงเฉือนอย่างเดียว) ดังแสดงในรูป เนื่องจาก $R = T_{max}$ แล้ว

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = T_{max} = \frac{254.65\ N\cdot m}{r^3}$$

ทฤษฎีหน่วยแรงตั้งฉากปกติที่มีค่ามากที่สุด สมการที่ 9-6 จะได้ว่า

$$|\sigma_1| \leq \sigma_{ult}$$

$$\frac{254.65\ N\cdot m}{r^3} \leq 150\times10^6 N/m^2$$

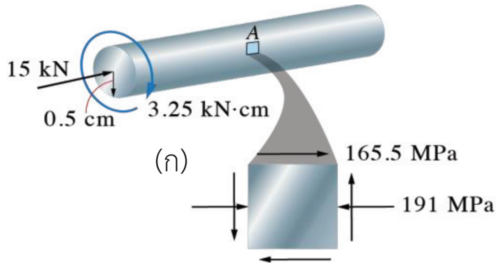
ดังนั้น รัศมีที่เล็กที่สุดของเพลาหาได้จาก

$$\frac{254.65 N.m}{r^3} = 150\times10^6 N/m^2$$

$$r = 0.01193\ m = 11.93\ mm$$ ตอบ

ตัวอย่างที่ 9.3

เพลาตันดังแสดงในรูป มีรัศมี 0.5 cm และทำจากเหล็กมีหน่วยแรงครากเท่ากับ 360 MPa จงตรวจสอบว่าแรงกระทำจนเพลาเกิดการแตกหักเนื่องจากทฤษฎีหน่วยแรงเฉือนที่มีค่ามากที่สุดและทฤษฎีพลังงานที่เกิดจากการบิดตัวที่มีค่ามากที่สุด



(ข)

รูปตัวอย่างที่ 9.3

วิธีทำ

สภาวะของหน่วยแรงในเพลาที่เกิด โดยแรงตามแนวแกนและโมเมนต์บิด จะได้ว่า

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{15\,kN}{\pi(0.5\,cm)^2}$$

$$= -19.10\,kN/cm^2 = 191 \text{ MPa}$$

$$T_{xy} = \frac{Tc}{J} = \frac{3.25\,kN(0.5\,cm)}{\frac{\pi}{2}(0.5\,cm)^4}$$

$$= 16.55\,kN/cm^2 = 165.5 \text{ MPa}$$

หน่วยแรงที่กระทำบนชิ้นส่วนของวัสดุที่จุด A ดังแสดงในรูป นอกจากการใช้วงกลมของโมห์หน่วยแรงหลักสามารถหาได้จากสมการการแปลงหน่วยแรง

จากสมการ $$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \left(\tau_{xy}\right)^2}$$

ดังนั้น $$= \frac{-191+0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-191-0}{2}\right)^2 + (165.5)^2}$$

$$= -95.5 \pm 191.1$$

$$\sigma_1 = 95.6\,\text{MPa}$$

$$\sigma_2 = -286.6\,\text{MPa}$$

ทฤษฎีหน่วยแรงเฉือนที่มีค่ามากที่สุด (maximum-shear-stress theory) เนื่องจากหน่วยแรงหลักมีเครื่องหมายตรงกันข้าม หน่วยแรงเฉือนมีค่ามากที่สุดอย่างสัมบูรณ์เกิดขึ้น ในระนาบ และประยุกต์ใช้สมการที่สองของสมการที่ 9-2 จะได้ว่า

$$|\sigma_1 - \sigma_2| \le \sigma_y$$

$$|95.6 - (-286.6)| \overset{?}{\le} 360$$

$$382.2 > 360$$

ดังนั้น วัสดุจึงเกิดการแตกหักเมื่อคำนวณจากทฤษฎีนี้

ทฤษฎีพลังงานที่เกิดจากการบิดที่มีค่ามากที่สุด (maximum-distortion-energy theory) ใช้ประยุกต์สมการที่ 9-5 จะได้ว่า

$$(\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1^2) \le \sigma_y$$

$$\left|(95.6)^2 - (95.6)(-286.6) + (-286.6)^2\right| \overset{?}{\le} (360)^2$$

$$118677.9 \le 129600$$

โดยใช้ทฤษฎีพลังงานที่เกิดขึ้นจากการบิดนี้ จะไม่เกิดการแตกหักขึ้น

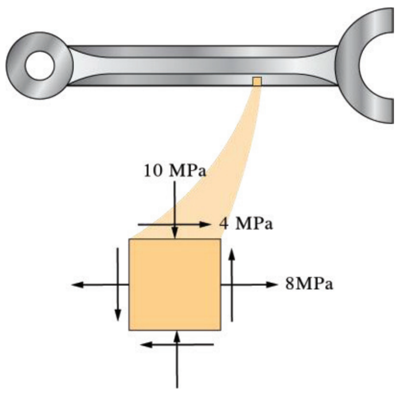
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 9

1) สภาวะที่เกิดขึ้นของหน่วยแรงที่ตำแหน่งวิกฤตของชิ้นส่วนจักรกล แสดงดังรูป จงหาค่าหน่วยแรงที่จุดคลาก สำหรับใช้ทำชิ้นส่วนนี้ โดยใช้ทฤษฎีหน่วยแรงเฉือนที่มีค่ามากที่สุด

2) เหล็กสแตนเลสทรงกระบอกกลวงมีเส้นผ่านศูนย์กลางภายในเท่ากับ 100 mm และมีผนังหนา 2 mm ถ้ามีแรงดัน P = 550 kPa, แรงแนวแกน 2500 N และแรงบิด 100 N.m ดังรูป จงหาหน่วยแรงที่จุดคลากโดยใช้ทฤษฎีพลังงานปิดที่มีค่ามากที่สุด เปรียบเทียบกับทฤษฎีหน่วยแรงเฉือนที่มีค่ามากที่สุด

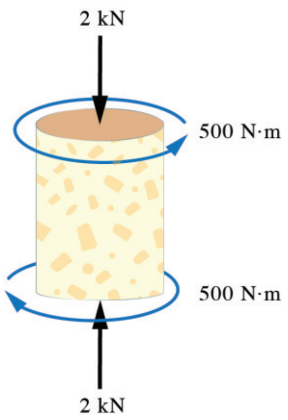
3) แท่งคอนกรีตทรงกระบอกมีเส้นผ่านศูนย์กลาง 50 mm ถูกกระทำด้วยแรงบิด 500 N.m และแรงอัด 2 kN จงหาว่าเกิดการแตกหักหรือไม่ โดยใช้ทฤษฎีหน่วยแรงตั้งฉากปกติที่มีค่ามากที่สุด σ_{ult} = 28 MPa

4) จงคำนวณหาองค์ประกอบย่อยของหน่วยแรงในระนาบที่จุดวิกฤตบนแผ่นเหล็กโครงสร้าง A-36 ดังแสดงในรูป จงคำนวณหาว่าเกิดการหักหรือการครากหรือไม่ โดยใช้ทฤษฎีหน่วยแรงเฉือนที่มากที่สุด (Maximum Shear-Stress Theory)

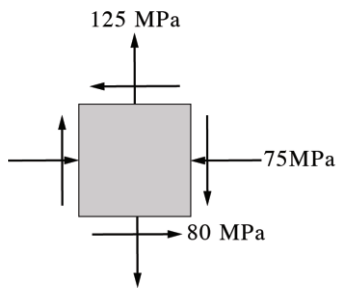


รูปแบบฝึกหัดข้อ 1)

รูปแบบฝึกหัดข้อ 2)



รูปแบบฝึกหัดข้อ 3)



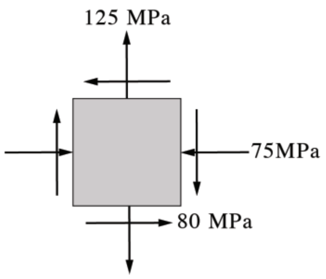
รูปแบบฝึกหัดข้อ 4)

5) จากโจทย์ข้อ 4 เมื่อใช้ทฤษฎีพลังงานที่เกิดการบิดที่มากที่สุด (Maximum-Distortion Energy Theory) จงอธิบายว่าเกิดการหักหรือการครากหรือไม่

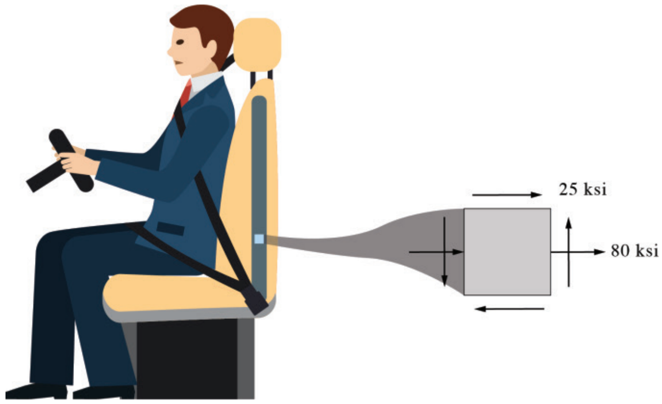
6) หน่วยแรงในระนาบหลักที่กระทำบนชิ้นส่วนเล็กๆ ดังแสดงในรูป ถ้าวัสดุทำจากเหล็กเครื่องมือที่มีหน่วยแรงคราก σ_y = 700 MPa จงคำนวณหาแฟกเตอร์ความปลอดภัยเมื่อเทียบกับการครากเมื่อใช้ทฤษฎีพลังงานที่เกิดการบิดที่มากที่สุดในการคราก

7) ระหว่างการชน สภาวะของหน่วยแรงที่กระทำที่จุดๆ หนึ่ง จงคำนวณหาหน่วยแรงครากของโลหะที่มีค่าน้อยที่สุดซึ่งจะถูกนำไปใช้เป็นข้อมูลในการเลือกชนิดของวัสดุโดยใช้ทฤษฎีหน่วยแรงเฉือนที่มากที่สุด

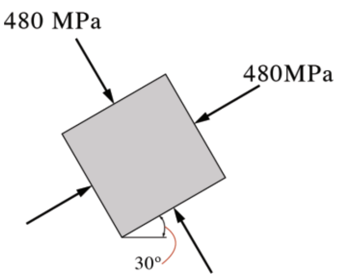
8) น้ำหนักกระทำภายในที่ภาคตัดวิกฤติตามเพลาขับเคลื่อนเหล็กของเรือถูกกระทำด้วยแรงกระทำในรูป ถ้าหน่วยแรงครากสำหรับการดึงและเฉือนคือ σ_y = 100 ksi และ τ_y = 50 ksi ตามลำดับ จงคำนวณหาเส้นผ่านศูนย์กลางที่ต้องการของเพลา โดยใช้ทฤษฎีพลังงานที่เกิดการบิดที่มากที่สุด



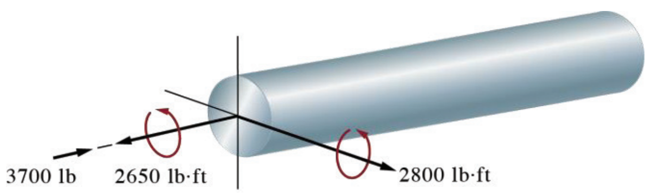
รูปแบบฝึกหัดข้อ 5)



รูปแบบฝึกหัดข้อ 7)

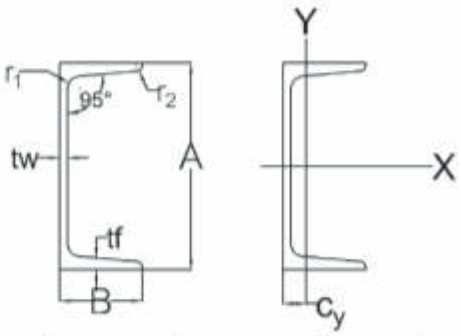


รูปแบบฝึกหัดข้อ 6)



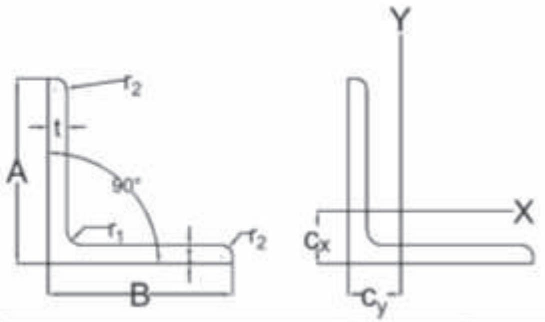
รูปแบบฝึกหัดข้อ 8)

ภาคผนวก
คุณสมบัติของหน้าตัดเหล็กรูปพรรณ



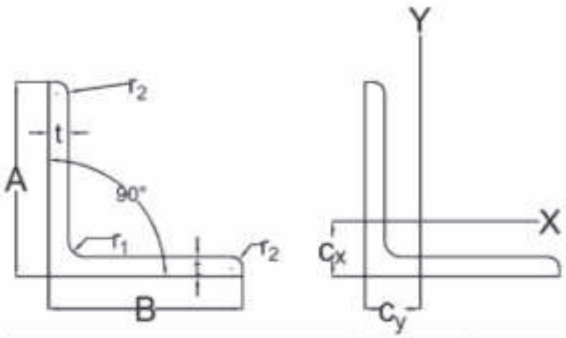
CHANNEL

Size	Dimensions		Thickness		Unit Weight	Sectional Area	Corner Radius		Centre of Gravity	Moment of Inertia		Radius of Gyration		Modulus of Section	
	A	B	tw	tf			r1	r2	Cy	Ix	Iy	rx	ry	Sx	Sy
	mm	mm	mm	mm	kg/m	cm^2	mm	mm	cm	cm^4	cm^4	cm	cm	cm^3	cm^3
75x40	75	40	5	7	6.92	8.82	8	4	1.27	75.9	12.4	2.93	1.19	20.2	4.54
100x50	100	50	5	7.5	9.36	11.92	8	4	1.55	189	26.9	3.98	1.5	37.8	7.82
125x65	125	65	6	8	13.4	17.11	8	4	1.94	425	65.5	4.99	1.96	68	14.4
150x75	150	75	6.5	10	18.6	23.71	10	5	2.31	864	122	6.04	2.27	115	23.6
	150	75	9	12.5	24	30.59	15	7.5	2.31	1050	147	5.86	2.19	140	28.3
180x75	180	75	7	10.5	21.4	27.2	11	5.5	2.15	1380	137	7.13	2.24	154	25.5
200x70	200	70	7	10	21.1	26.92	11	5.5	1.85	1620	113	7.77	2.04	162	21.8
200x80	200	80	7.5	11	24.6	31.33	12	6	2.24	1950	177	7.89	2.38	195	30.8
200x90	200	90	8	13.5	30.3	38.65	14	7	2.77	2490	286	8.03	2.72	249	45.9
250x90	250	90	9	13	34.6	44.07	14	7	2.42	4180	306	9.74	2.64	335	46.5
	250	90	11	14.5	40.2	51.17	17	8.5	2.39	4690	342	9.57	2.58	375	51.7
300x90	300	90	9	13	38.1	48.57	14	7	2.23	6440	325	11.5	2.59	429	48
	300	90	10	15.5	43.8	55.74	19	9.5	2.33	7440	373	11.5	2.59	494	56
	300	90	12	16	48.6	61.9	19	9.5	2.25	7870	391	11.3	2.51	525	57.9
380x100	380	100	10.5	16	54.5	69.39	18	9	2.41	14500	557	14.5	2.83	762	73.3
	380	100	13	16.5	62	78.96	18	9	2.29	15600	584	14.1	2.72	822	75.8
	380	100	13	20	67.3	85.71	24	12	2.5	17600	671	14.3	2.8	924	89.5



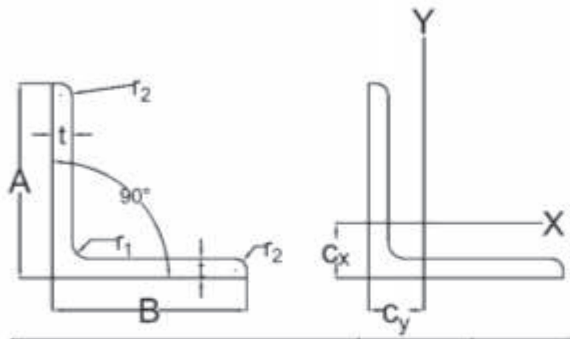
EQUAL ANGLES

Dimensions					Sectional Area	Unit Weight	Centre of Gravity		Moment of Inertia				Radius of Gyration				Modulus of Section	
A	B	t	r1	r2			Cx	Cy	Ix	Iy	max Iu	min Iv	rx	ry	max ru	min rv	Sx	Sy
mm	mm	mm	mm	mm	cm^2	kg/m	cm	cm	cm^4	cm^4	cm^4	cm^4	cm	cm	cm	cm	cm^3	cm^3
25	25	3	4	2	1.427	1.12	0.719	0.719	0.797	0.797	1.26	0.332	0.747	0.747	0.94	0.483	0.448	0.448
25	30	3	4	2	1.727	1.36	0.844	0.844	1.42	1.42	2.26	0.59	0.908	0.908	1.14	0.585	0.661	0.661
40	40	3	4.5	2	2.336	1.83	1.09	1.09	3.53	3.53	5.6	1.46	1.23	1.23	1.55	0.79	1.21	1.21
45	45	4	6.5	3	3.492	2.74	1.27	1.24	6.5	6.5	10.3	2.7	1.36	1.36	1.72	0.88	2	2
45	45	5	6.5	3	4.302	3.38	1.28	1.28	7.91	7.91	12.5	3.29	1.36	1.36	1.71	0.874	2.46	2.46
50	50	4	6.5	3	3.892	3.06	1.37	1.37	9.06	9.06	14.4	3.76	1.53	1.53	1.92	0.983	2.49	2.49
50	50	5	6.5	3	4.802	3.77	1.41	1.41	11.1	11.1	17.5	4.58	1.52	1.52	1.91	0.976	3.08	3.08
50	50	6	6.5	4.5	5.644	4.43	1.44	1.44	12.6	12.6	20	5.23	1.5	1.5	1.88	0.963	3.55	3.55
60	60	4	6.5	3	4.692	3.68	1.61	1.61	16	16	25.4	6.62	1.85	1.85	2.33	1.19	3.66	3.66
60	60	5	6.5	3	5.802	4.55	1.66	1.66	19.6	19.6	31.2	8.09	1.84	1.84	2.32	1.18	4.52	4.52
65	65	5	8.5	3	6.367	5	1.77	1.77	25.3	25.3	40.1	10.5	1.99	1.99	2.51	1.28	5.35	5.35
65	65	6	8.5	4	7.527	5.91	1.81	1.81	29.4	29.4	46.6	12.2	1.98	1.98	2.49	1.27	6.26	6.26
65	65	8	8.5	6	9.761	7.66	1.88	1.88	36.8	36.8	58.3	15.3	1.94	1.94	2.44	1.25	7.96	7.96



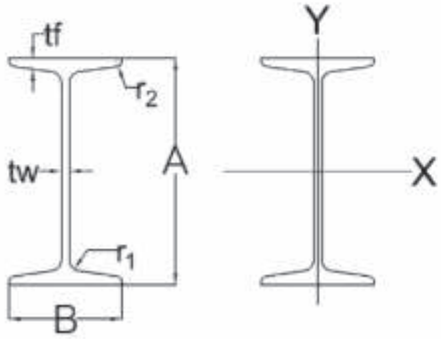
EQUAL ANGLES

Dimensions					Sectional Area	Unit Weight	Centre of Gravity		Moment of Inertia				Radius of Gyration				Modulus of Section	
A	B	t	r1	r2			Cx	Cy	Ix	Iy	max Iu	min Iv	rx	ry	max ru	min rv	Sx	Sy
mm	mm	mm	mm	mm	cm^2	kg/m	cm	cm	cm^4	cm^4	cm^4	cm^4	cm	cm	cm	cm	cm^3	cm^3
70	70	6	8.5	4	8.127	6.38	1.93	1.93	37.1	37.1	58.9	15.3	2.14	2.14	2.69	1.37	7.33	7.33
75	75	6	8.5	4	8.727	6.85	2.06	2.06	46.1	46.1	73.2	19	2.3	2.3	2.9	1.48	8.47	8.47
75	75	9	8.5	6	12.69	9.96	2.17	2.17	64.4	64.4	102	26.7	2.25	2.25	2.84	1.45	12.1	12.1
75	75	12	8.5	6	16.56	13	2.29	2.29	81.9	81.9	129	34.5	2.22	2.22	2.79	1.44	15.7	15.7
80	80	6	8.5	4	9.327	7.32	2.18	2.18	56.4	56.4	89.6	23.2	2.46	2.46	3.1	1.58	9.7	9.7
90	90	6	10	5	10.55	8.28	2.42	2.42	80.7	80.7	128	33.4	2.77	2.77	3.48	1.78	12.3	12.3
90	90	7	10	5	12.22	9.59	2.46	2.46	93	93	148	38.3	2.76	2.76	3.48	1.77	14.2	14.2
90	90	10	10	7	17	13.3	2.57	2.57	125	125	199	51.7	2.71	2.71	3.42	1.74	19.5	19.5
90	90	13	10	7	21.71	17	2.69	2.69	156	156	248	65.3	2.68	2.68	3.38	1.73	24.8	24.8
100	100	7	10	5	13.62	10.7	2.71	2.71	129	129	205	53.2	3.08	3.08	3.88	1.98	17.7	17.7
100	100	10	10	7	19	14.9	2.82	2.82	175	175	278	72	3.04	3.04	3.83	1.95	24.4	24.4
100	100	13	10	7	24.31	19.1	2.94	2.94	220	220	348	91.1	3	3	3.78	1.94	31.1	31.1
120	120	8	12	5	18.76	14.7	3.24	3.24	258	258	410	106	3.71	3.71	4.67	2.38	29.5	29.5



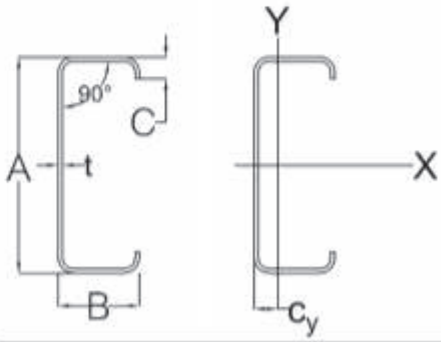
EQUAL ANGLES

Dimensions					Sectional Area	Unit Weight	Centre of Gravity		Moment of Inertia				Radius of Gyration				Modulus of Section	
A	B	t	r1	r2			Cx	Cy	Ix	Iy	max Iu	min Iv	rx	ry	max ru	min rv	Sx	Sy
mm	mm	mm	mm	mm	cm^2	kg/m	cm	cm	cm^4	cm^4	cm^4	cm^4	cm	cm	cm	cm	cm^3	cm^3
130	130	9	12	6	22.74	17.9	3.53	3.53	366	366	583	150	4.01	4.01	5.06	2.57	38.7	38.7
130	130	12	12	8.5	29.76	23.4	3.64	3.64	467	467	743	192	3.96	3.96	5	2.54	49.9	49.9
130	130	15	12	8.5	36.75	28.8	3.76	3.76	568	568	902	234	3.93	3.93	4.95	2.53	21.5	21.5
150	150	12	14	7	34.77	27.3	4.14	4.14	740	740	1180	304	4.61	4.61	5.82	2.96	68.1	68.1
150	150	15	14	10	42.74	33.6	4.24	4.24	888	888	1410	365	4.56	4.56	5.75	2.92	82.6	82.6
150	150	19	14	10	53.38	41.9	4.4	4.4	1090	1090	1730	451	4.52	4.52	5.69	2.91	103	103
175	175	12	15	11	40.52	31.8	4.73	4.73	1170	1170	1860	480	5.38	5.38	6.78	3.44	91.8	91.8
175	175	15	15	11	50.21	39.4	4.85	4.85	1440	1440	2290	589	5.35	5.35	6.75	3.42	114	114
200	200	15	17	12	57.75	45.3	5.46	5.46	2180	2180	3470	891	6.14	6.14	7.75	3.93	150	150
200	200	20	17	12	76	59.7	5.67	5.67	2820	2820	4490	1160	6.09	6.09	7.68	3.9	197	197
200	200	25	17	12	93.75	73.6	5.86	5.86	3420	3420	5420	1410	6.04	6.04	7.61	3.88	242	242
250	250	25	24	12	119.4	93.7	7.1	7.1	6950	6950	11000	2860	7.63	7.63	9.62	4.9	388	388
250	250	35	24	18	162.6	128	7.45	7.45	9110	9110	14400	3790	7.49	7.49	9.42	4.83	519	519



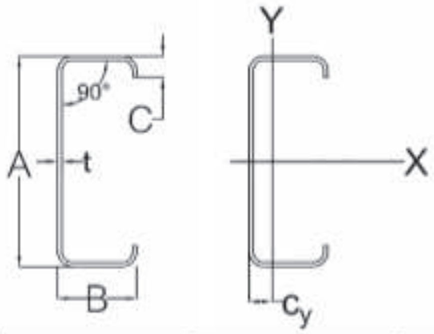
I-BEAM

Dimensions						Sectional Area	Unit Weight	Moment of Inertia		Radius of Gyration		Modulus of Section	
A	B	t1	t2	r1	r2			Ix	Iy	rx	ry	Sx	Sy
mm	mm	mm	mm	mm	mm	cm^2	kg/m	cm^4	cm^4	cm	cm	cm^3	cm^3
100	75	5	8	7	3.5	16.43	12.9	281	47.3	4.14	1.7	56.2	12.6
125	75	5.5	9.5	9	4.5	20.45	16.1	538	57.5	5.13	1.68	86	15.3
150	75	5.5	9.5	9	4.5	21.83	17.1	819	57.5	6.12	1.62	109	15.3
150	125	8.5	14	13	6.5	46.15	36.2	1760	385	6.18	2.89	235	61.6
180	100	6	10	10	5	30.06	23.6	1670	138	7.45	2.14	186	27.5
200	100	7	10	10	5	33.06	26	2170	138	8.11	2.05	217	27.7
200	150	9	16	15	7.5	64.16	50.4	4460	753	8.34	3.43	446	10
250	125	7.5	12.5	12	6	48.79	38.3	5180	337	10.3	2.63	414	53.9
250	125	10	19	21	10.5	70.73	55.5	7310	538	10.2	2.76	585	86
300	150	8	13	12	6	61.58	48.3	9480	588	12.4	3.09	632	78.4
300	150	10	18.5	19	9.5	83.47	65.5	12700	886	12.3	3.26	849	118
300	150	11.5	22	23	11.5	97.88	76.8	14700	1080	12.2	3.32	978	143
350	150	9	15	13	6.5	74.58	58.5	15200	702	14.3	3.07	870	93.5
350	150	12	24	25	12.5	111.1	87.2	22400	1180	14.2	3.26	1280	158
400	150	10	18	17	8.5	91.73	72	21400	864	16.2	3.07	1200	115
400	150	12.5	25	27	13.5	122.1	95.8	31700	1240	16.1	3.18	1580	165
450	175	11	20	19	9.5	116.8	91.7	39200	1510	18.3	3.6	1740	173
450	175	13	26	27	13.5	146.1	115	48800	2020	18.3	3.72	2170	231
600	190	13	25	25	12.5	169.4	133	98400	2460	24.1	3.81	3280	259
600	190	16	35	38	19	224.5	176	130000	3540	24.1	3.97	4330	373



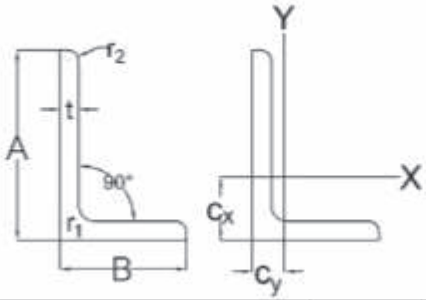
LIGHT LIP CHANNEL

Dimensions		Sectional Area	Unit Weight	Centre of Gravity		Moment of Inertia		Radius of Gyration		Modulus of Section		Center of Shear	
AxBxC	t			Cx	Cy	Ix	Iy	rx	ry	Sx	Sy	Zx	Zy
mm	mm	cm^2	kg/m	cm	cm	cm^4	cm^4	cm	cm	cm^3	cm^3	cm	cm
250x75x25	4.5	18.92	14.9	0	2.07	1690	129	9.44	2.62	135	23.8	5.1	0
200x75x20	4.5	16.67	13.1	0	2.32	892	110	7.61	2.69	99	23.3	5.6	0
	4	14.95	11.7	0	2.32	8.95	110	7.74	2.72	89.5	21.3	5.7	0
	3.2	12.13	9.52	0	2.33	736	92.3	7.7	2.76	73.6	17.8	5.7	0
200x75x20	4.5	16.22	12.7	0	2.19	963	109	7.71	2.6	96.3	20.6	5.3	0
	4	14.55	11.4	0	2.19	871	100	7.74	2.62	87.1	18.9	5.3	0
	3.2	11.81	9.27	0	2.19	716	84.1	7.79	2.67	71.6	15.8	5.4	0
150x75x25	4.5	14.42	11.3	0	2.65	501	109	5.9	2.75	66.9	22.5	6.3	0
	4	12.95	10.2	0	2.65	455	99.8	5.93	2.78	60.6	20.6	6.3	0
	3.2	10.53	8.27	0	2.66	375	83.6	5.97	2.82	50	17.3	6.4	0
150x65x20	4	11.75	9.22	0	2.11	401	63.7	5.48	2.33	53.3	14.5	5	0
	3.2	9.567	7.51	0	2.11	332	53.8	5.89	2.37	44.3	12.2	5.1	0
	2.3	7.012	5.5	0	2.12	248	41.1	5.94	2.42	33	9.37	5.2	0
150x50x20	4.5	11.72	9.2	0	1.54	368	35.7	5.6	1.75	49	10.5	3.7	0
	3.2	8.607	6.76	0	1.54	280	28.3	5.71	1.81	37.4	8.19	3.8	0
	2.3	6.322	4.96	0	1.55	210	21.9	5.77	1.86	28	6.33	3.8	0
125x50x20	4.5	10.59	8.32	0	1.68	238	33.5	4.74	1.78	38	10	4	0
	4	9.548	7.5	0	1.68	217	33.1	4.77	1.811	34.7	9.38	4	0
	3.2	7.807	6.13	0	1.68	181	26.6	4.82	1.85	29	8.02	4	0
	2.3	5.747	4.51	0	1.69	137	20.6	4.88	1.89	21.9	6.22	4.1	0
120x60x25	4.5	11.72	9.2	0	2.25	252	58	4.63	2.22	41.9	15.5	5.3	0



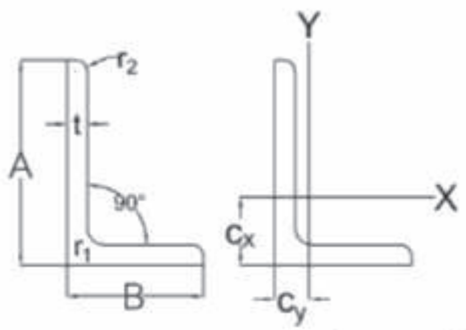
LIGHT LIP CHANNEL

Dimensions		Sectional Area	Unit Weight	Centre of Gravity		Moment of Inertia		Radius of Gyration		Modulus of Section		Center of Shear	
AxBxC	t			Cx	Cy	Ix	Iy	rx	ry	Sx	Sy	Zx	Zy
mm	mm	cm^2	kg/m	cm	cm	cm^4	cm^4	cm	cm	cm^3	cm^3	cm	cm
120x60x20	3.2	8.287	6.51	0	2.12	186	40.9	4.74	2.22	31	10.5	4.9	0
	2.3	6.092	4.78	0	2.13	140	31.3	4.79	2.27	23.3	8.1	5.1	0
120x40x20	3.2	7.007	5.5	0	1.32	144	15.3	4.53	1.48	24	5.71	3.4	0
100x50x20	4.5	9.469	7.43	0	1.86	139	30.9	3.82	1.81	27.7	9.82	4.3	0
	4	8.548	6.71	0	1.86	127	28.7	3.85	1.83	25.4	9.13	4.3	0
	3.2	7.007	5.5	0	1.86	107	24.5	3.9	1.87	21.3	7.81	4.4	0
	2.8	6.205	4.87	0	1.88	99.8	23.2	3.96	1.91	20	7.44	4.3	0
	2.3	5.172	4.06	0	1.86	80.7	19	3.95	1.92	16.1	6.06	4.4	0
	2	4.537	3.56	0	1.86	71.4	16.9	3.97	1.93	14.3	5.4	4.4	0
	1.6	3.672	2.88	0	1.87	58.4	14	3.99	1.95	11.7	4.47	4.5	0
90x45x20	3.2	6.367	5	0	1.72	76.9	18.3	3.48	1.69	17.1	6.57	4.1	0
	2.3	4.712	3.7	0	1.73	58.6	14.2	3.53	1.74	13	5.14	4.1	0
	1.6	3.352	2.63	0	1.73	42.6	10.5	3.56	1.77	9.46	5.8	4.2	0
75x45x15	2.3	4.137	3.25	0	1.72	37.1	11.8	3	1.69	9.9	4.24	4	0
75x35x15	2.3	3.677	2.89	0	1.29	31	6.58	2.91	1.34	8.28	2.98	3.1	0
70x40x25	1.6	3.032	2.38	0	1.8	22	8	2.69	1.62	6.29	3.64	4.4	0
60x30x10	2.3	2.872	2.25	0	1.06	15.6	3.32	2.33	1.07	5.2	1.71	2.5	0
	2	2.537	1.99	0	1.06	14	3.01	2.35	1.09	4.65	1.55	2.5	0
	1.6	2.072	1.63	0	1.06	11.6	2.56	2.37	1.11	3.88	1.32	2.5	0



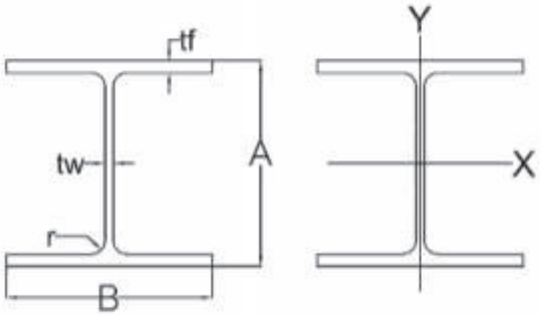
UNEQUAL ANGLES

Dimensions					Sectional Area	Unit Weight	Centre of Gravity		Moment of Inertia				Radius of Gyration				Tan a	Modulus of Section	
A	B	t	r1	r2			Cx	Cy	Ix	Iy	max Iu	min Iv	rx	ry	max ru	min rv		Sx	Sy
mm	mm	mm	mm	mm	cm^2	kg/m	cm	cm	cm^4	cm^4	cm^4	cm^4	cm	cm	cm	cm		cm^3	cm^3
90	75	6	8.5	4	9.627	7.56	2.64	1.9	76.9	486	101	24.2	2.83	2.25	3.25	1.58	0.681	12.1	8.68
90	75	9	8.5	6	14.04	11	2.75	2.01	109	68.1	143	34.1	2.78	2.2	3.19	1.56	0.676	17.4	12.4
90	75	12	8.5	6	18.36	14.4	2.87	2.12	139	86.8	182	44	2.75	2.17	3.14	1.55	0.672	22.6	16.1
100	75	7	10	5	11.87	9.32	3.06	1.84	113	57	144	30.7	3.15	2.19	3.49	1.61	0.548	17	10.1
100	75	10	10	7	16.5	13	3.18	1.94	159	76.1	194	41.3	3.11	2.15	3.43	1.58	0.543	23.2	13.7
100	75	13	10	7	21.06	16.5	3.3	2.06	199	94.8	242	52.2	3.08	2.12	3.39	1.57	0.538	29.7	17.4
125	75	7	10	5	13.62	10.7	4.1	1.64	219	60.4	243	36.4	4.01	2.11	4.23	1.63	0.362	26.1	10.3
125	75	9	10	7	17.19	13.5	4.18	1.71	271	73.7	300	44.5	3.97	2.07	4.18	1.61	0.359	32.6	12.7
125	75	10	10	7	19	14.9	4.23	1.75	298	80.9	330	49	3.96	2.06	4.17	1.61	0.357	36.1	14.1
125	75	13	10	7	24.31	19.1	4.35	1.87	376	101	414	61.9	3.93	2.04	4.13	1.6	0.352	46.1	17.9
125	90	7	10	5	14.67	11.5	3.84	2.11	233	102	279	56.2	3.99	2.64	4.36	1.96	0.51	26.9	14.3
125	90	9	10	7	18.54	14.6	3.91	2.18	289	126	345	69.2	3.95	2.6	4.32	1.93	0.507	33.6	18.4
125	90	10	10	7	20.5	16.1	3.95	2.22	318	138	380	76.1	3.94	2.59	4.3	1.93	0.506	37.2	20.4
125	90	13	10	7	26.26	20.6	4.08	2.34	401	165	479	87.2	3.91	2.51	4.27	1.82	0.499	47.5	24.8



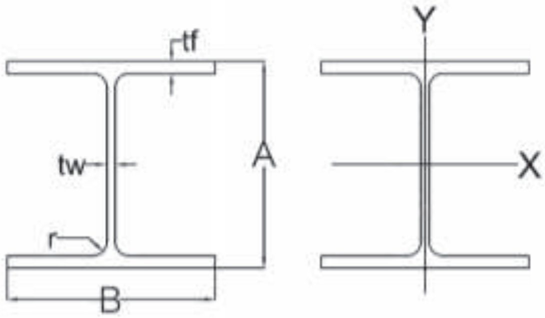
UNEQUAL ANGLES

Dimensions					Sectional Area	Unit Weight	Centre of Gravity		Moment of Inertia				Radius of Gyration				Tana	Modulus of Section	
A	B	t	r1	r2			Cx	Cy	Ix	Iy	max Iu	min Iv	rx	ry	max ru	min rv		Sx	Sy
mm	mm	mm	mm	mm	cm^2	kg/m	cm	cm	cm^4	cm^4	cm^4	cm^4	cm	cm	cm	cm		cm^3	cm^3
150	90	9	12	6	20.94	16.4	4.96	2	484	133	537	80.2	4.81	2.52	5.06	1.96	0.362	48.2	19
150	90	12	12	8.5	27.36	21.5	5.07	2.1	619	168	634	102	4.75	2.47	5	1.93	0.357	62.3	24.3
150	90	15	12	8.5	33.75	26.5	5.2	2.22	753	202	831	124	4.72	2.45	4.96	1.92	0.353	76.8	29.9
150	100	9	12	6	21.84	17.1	4.77	2.32	502	179	580	101	4.79	2.86	5.15	2.15	0.441	49	23.3
150	100	12	12	8.5	28.56	22.4	4.88	2.41	642	229	738	133	4.74	2.83	5.08	2.15	0.435	63.4	30.2
150	100	15	12	8.5	35.25	27.7	5.01	2.53	781	276	897	161	4.71	2.8	5.04	2.14	0.432	78.2	27



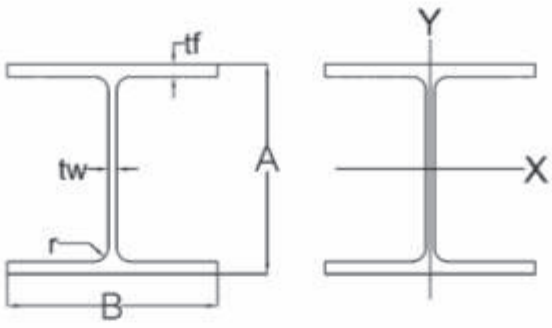
WIDE FLANGE

Size	Dimensions		Thickness		Unit Weight	Corner Radius	Sectional Area	Moment of Inertia		Radius of Gyration		Modulus of Section	
	A	B	tw	tf				Ix	Iy	rx	ry	Sx	Sy
	mm.	mm.	mm.	mm.	kg/m	mm.	cm^2	cm^4	cm^4	cm	cm	cm^3	cm^3
900x300	912	302	18	34	286	28	364	498000	15700	37	6.56	10,900	1,040
	900	300	16	28	243	28	309.8	411000	12600	36.4	6.39	9140	843
	890	299	15	23	213	28	270.9	345000	10300	35.7	6.16	7760	688
800x300	808	302	16	30	241	28	307.6	339000	138000	33.2	6.7	8400	915
	800	300	14	26	210	28	267.4	29200	11700	33	6.62	7290	782
	792	300	14	22	191	28	243.4	254000	9930	32.3	6.39	6410	662
700x300	708	302	15	28	215	28	273.5	237000	12900	29.4	6.86	6700	653
	700	300	13	24	185	28	235.5	201000	10800	29.3	6.78	5760	722
	692	300	13	20	166	28	211.5	172000	9020	28.6	6.53	4980	602
600x300	594	302	14	23	175	28	222.4	137000	10600	24.9	6.9	4620	701
	588	300	12	20	151	28	192.5	118000	9020	24.8	6.85	4020	601
	582	300	12	18	137	28	174.5	103000	7670	24.3	6.63	3530	511
600x200	612	202	13	23	134	22	107.7	103000	3180	24.6	4.31	3380	314
	606	201	12	20	120	22	152.5	90400	2720	24.3	4.22	2980	271
	600	200	11	17	106	22	134.4	77600	2280	24	4.12	2590	228
	596	199	10	15	94.6	22	120.5	68700	1980	23.9	4.05	2310	199
500x300	488	300	11	18	128	26	163.5	71000	8110	20.8	7.04	2910	541
	482	300	11	15	114	26	145.5	60400	6760	20.4	6.82	2500	451
500x200	506	201	11	19	103	20	131.3	56500	2580	20.7	4.43	2230	257
	500	200	10	16	89.5	20	114.2	47800	2140	20.5	4.33	1910	214
	496	199	9	14	79.5	20	101.3	41900	1840	20.3	4.27	1690	185



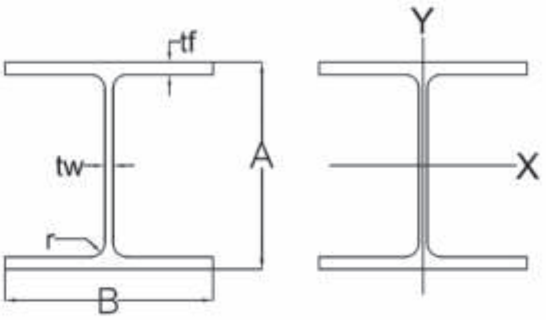
WIDE FLANGE

Size	Dimensions		Thickness		Unit Weight	Corner Radius	Sectional Area	Moment of Inertia		Radius of Gyration		Modulus of Section	
	A	B	tw	tf				Ix	Iy	rx	ry	Sx	Sy
	mm.	mm.	mm.	mm.	kg/m	mm.	cm^2	cm^4	cm^4	cm	cm	cm^3	cm^3
450x300	440	300	11	18	124	24	157.4	56100	8110	18.9	7.18	2550	541
	434	299	10	15	106	24	135	46800	6690	18.6	7.04	2160	448
450x200	450	200	9	14	76	18	96.76	33500	1870	18.6	4.4	1490	187
	446	199	8	12	66.2	18	84.3	26700	1580	18.5	4.33	1290	159
400x400	498	432	45	70	605	22	770.1	298000	94400	19.7	11.1	12000	4370
	458	417	30	50	415	22	528.6	187000	60500	18.6	10.7	8170	2900
	428	407	20	35	283	22	360.7	119000	39400	18.2	10.4	5570	1930
	414	405	18	28	232	22	295.4	92800	31000	17.7	10.2	4480	1530
	406	403	16	24	200	22	254.9	78000	26200	17.5	10.1	3840	1300
	400	408	21	21	197	22	250.7	70900	23800	16.8	9.75	3540	1170
	400	400	13	21	172	22	218.7	66600	22400	17.5	10.1	3330	1120
	394	405	18	18	168	22	214.4	59700	20000	16.7	9.65	3030	985
	394	398	11	18	147	22	186.8	56100	18900	17.3	10.1	2850	951
	388	402	15	15	140	22	178.5	49000	16300	16.6	9.54	2250	809
400x300	390	300	10	16	107	22	136	38700	7210	16.9	7.28	1980	481
	386	299	9	14	94.3	22	120.1	33700	6240	16.7	7.21	1740	418
400x200	400	200	8	13	66	16	84.12	23700	1740	16.8	4.54	1190	174
	396	199	7	11	56.6	16	72.16	20000	1450	16.7	4.48	1010	145



WIDE FLANGE

Size	Dimensions		Thickness		Unit Weight	Corner Radius	Sectional Area	Moment of Inertia		Radius of Gyration		Modulus of Section	
	A	B	tw	tf				Ix	Iy	rx	ry	Sx	Sy
	mm.	mm.	mm.	mm.	kg/m	mm.	cm^2	cm^4	cm^4	cm	cm	cm^3	cm^3
350x350	356	352	14	22	159	20	202	47600	16000	15.3	8.9	2670	909
	350	357	19	19	156	20	198.4	42800	14400	14.7	8.53	2450	809
	350	350	12	19	137	20	173.9	40300	13600	15.2	8.84	2300	776
	344	354	16	16	131	20	166.6	35300	11800	14.6	8.43	2050	669
	344	348	10	16	115	20	146	33300	11200	15.1	8.78	1940	646
	338	351	13	13	106	20	135.3	28200	9380	14.4	8.33	1670	534
350x250	340	250	9	14	79.7	20	101.5	21700	3650	14.6	6	1280	292
	336	249	8	12	69.2	20	88.15	18500	3090	14.5	5.92	1100	248
350x175	350	175	7	11	49.6	14	63.14	13600	684	14.7	3.95	775	112
	346	174	6	9	41.4	14	52.68	11100	792	14.5	3.86	641	91
300x300	304	301	11	17	106	18	134.8	23400	7730	13.2	7.57	1540	514
	300	305	15	15	106	18	134.8	21500	7100	12.6	7.26	1440	466
	300	300	10	15	94	18	119.8	20400	6750	13.1	7.51	1360	450
	298	299	9	14	87	18	110.8	18800	6240	13	7.51	1270	417
	294	302	12	12	84.5	18	107.7	16900	5520	12.5	7.16	1150	365
300x200	298	201	9	14	65.4	18	83.36	13300	1900	12.6	4.77	893	189
	294	200	8	12	56.8	18	72.38	11300	1600	12.5	4.71	771	160
300x150	300	150	6.5	9	36.7	13	46.78	7210	508	12.4	3.29	481	67.7
	298	149	5.5	8	32	13	40.8	6320	442	12.4	3.29	424	59.3



WIDE FLANGE

Size	Dimensions		Thickness		Unit Weight	Corner Radius	Sectional Area	Moment of Inertia		Radius of Gyration		Modulus of Section	
	A	B	tw	tf				Ix	Iy	rx	ry	Sx	Sy
	mm.	mm.	mm.	mm.	kg/m	mm.	cm^2	cm^4	cm^4	cm	cm	cm^3	cm^3
250x250	250	255	14	14	82.2	16	104.7	11500	3880	10.5	6.09	919	304
	250	250	9	14	72.4	16	92.18	10800	3650	10.8	6.29	867	292
	248	249	8	13	66.5	16	84.7	9930	3350	10.8	6.29	801	269
	244	252	11	11	64.4	16	82.06	8790	2940	10.3	5.98	720	233
250x175	244	175	7	11	44.1	16	56.24	6120	984	10.4	4.18	502	113
250x125	250	125	6	9	29.6	12	37.66	4050	294	10.4	2.79	324	47
	248	124	5	8	25.7	12	32.68	3540	255	10.4	2.79	285	41.1
200x200	208	202	10	16	65.7	13	83.69	6530	2200	8.83	5.13	628	218
	200	204	12	12	56.2	13	7153	4980	1700	8.35	4.88	498	167
	200	200	8	12	49.9	13	63.53	4720	1600	8.62	5.02	472	160
200x150	194	150	6	9	30.6	13	39.01	2690	507	8.3	3.61	277	67.6
200x100	200	100	5.5	8	21.3	11	27.16	1840	134	8.24	2.22	184	26.8
	198	99	4.5	7	18.2	11	23.18	1580	114	8.26	2.21	160	23
175x175	175	175	7.5	11	40.2	12	51.21	2880	984	7.5	4.38	330	112
175x125	169	125	5.5	8	23.3	12	29.65	1530	261	7.18	2.97	181	41.8
175x90	175	90	5	8	18.1	9	23.04	1210	97.5	7.26	2.06	139	21.7
150x150	150	150	7	10	31.5	11	40.14	1640	563	6.39	3.75	219	75.1
150x100	148	100	6	9	21.1	11	26.84	1020	151	6.71	2.37	138	30.1
150x75	150	75	5	7	14	8	17.85	666	49.5	6.11	1.66	88.8	13.2
125x125	125	125	6.5	9	23.8	10	30.31	847	293	5.29	3.11	136	47
125x50	125	60	6	8	13.2	9	16.84	413	29.2	4.95	1321	66.1	9.73
100x100	100	100	6	8	17.2	10	21.9	383	134	4.18	2.47	76.5	26.7
100x50	100	50	5	7	9.3	8	11.85	187	14.8	3.98	1.12	37.5	5.91

บรรณานุกรม

[1] Andrew Pytel and Ferdinand L. Singer. (1987). *Strength of Materials*. 4th ed. New York: Hyper Collins Publishers Inc.

[2] Arthur P. Boresi, Richard J. Schmidt, and Omar M. Sidebottom. (1992). *Advanced Mechanics of Materials*. 5th ed. Singapore: John Wiley & Sons, Inc.

[3] Khomwan, N. (2005). "Debonding failure in CFRP strengthened plane stress members." Ph.D. thesis, School of Civil and Environmental Engineering, The Univ. of New South Wales, Kensington, New South Wales, Australia.

[4] Khomwan, N., Foster, S. J., and Smith, S. T. (2010). "FE modeling of FRP repaired planar concrete elements subjected to monotonic and cyclic loading." J. Comp. Constr, pp. 720–729.

[5] R. C. Hibbeler. (2005). *Mechanics of Materials*. 2nd ed. Singapore: Prentice Hall, Pearson Education South Asia Pte Ltd.

[6] Wongtala, P., Chaimoon, N., Khomwan, N., and Chaimoon, K. (2020). "Structural Behavior of Reactive Powder Concrete Corbels with Low Shear Span-to-Depth Ratio". Proceedings of the 12th International Conference on Science, Technology and Innovation for Sustainable Well-Being (STISWB-XII), Silpakorn University, Thailand (Online), AMM-17, pp. 1-4.

[7] นันทวัฒน์ ขมหวาน (หัวหน้าโครงการ) และคณะวิจัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, รายงานฉบับสมบูรณ์ KU-SCG (2562). "โครงการการศึกษาพฤติกรรมของคอนกรีตสมรรถนะสูงสำหรับโครงสร้างสะพาน"

[8] รัฐพงษ์ ม่วงประโคน, พิมลรัตน์ แผ่ทอง, นันทวัฒน์ ขมหวาน และ กริสน์ ชัยมูล. (2562). "การทดสอบหาพลังงานการแตกหักของรีแอ็คทีฟเพาเดอร์คอนกรีตด้วยวิธี Modified Compact Tension". การประชุมวิชาการวิศวกรรมโยธาแห่งชาติ ประจำปี ครั้งที่ 24, วันที่ 10-12 ก.ค. 62, รร.เซ็นทารา, อุดรธานี ราชอาณาจักรไทย.

[9] สุรศักดิ์ งามสนิท, นันทวัฒน์ ขมหวาน และ กริสน์ ชัยมูล (2562). "การวิบัติของคานหูช้างรีแอ็คทีฟเพาเดอร์คอนกรีตไม่เสริมเหล็กปลอก". วิศวกรรมสารฉบับวิจัยและพัฒนา, ปีที่ 30 ฉบับที่ 1 มกราคม-มีนาคม 2562: น. 7-14

ดัชนี

ก

กฎของฮุกและโมดูลัสของยัง, 11
กลศาสตร์การแตกหัก, 252
การกำหนดทิศทางของโมเมนต์ดัดที่กระทำ, 70
การโก่งเดาะ, 155
การตอบสนองแบบไร้เชิงเส้น, 90
การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ, 209
แกนสะเทิน, 55

ข

ขีดจำกัดความยืดหยุ่น, 57

ค

ความเค้นเฉือน, 3
ความเค้นดัด, 59
ความเค้นดึง, 3
ความเค้นที่ยอมให้, 33
ความเค้นเทนเซอร์, 14
ความเค้นมีค่าต่ำกว่าขีดจำกัดความเป็นปฏิภาค, 57
ความเค้นระนาบ, 15
ความเค้นสองแกน, 15
ความเค้นที่จุดคราก, 167
ความเค้นตกค้าง, 168
ความเค้นอัด, 2
ความเค้นประลัย, 176
ความเครียดเฉือน, 10
ความเครียดดึง, 5
ความเครียดแนวตั้งฉาก, 16
ความเครียดอัด, 5
ความโค้ง, 60
ความผิดพลาดในการประกอบ, 210
คาน, 26
คานยาวอนันต์, 90
คานรูปตัดแบบปีกกว้าง, 32
คานหูช้าง, 27
คุณสมบัติของภาคตัด, 83

ง

งานเสมือนภายใน, 207
เงื่อนไขของความสอดคล้องกัน, 204
เงื่อนไขของสมดุล, 204

ฐ

ฐานรากเป็นแบบยืดหยุ่นเชิงเส้น, 90

น

น้ำหนักบรรทุกวิกฤต, 156

ผ

ผิวในแนวดิ่ง, 184

พ

พลังงานความเครียด, 183

ม

โมดูลัสของหน้าตัด, 59
โมดูลัสความแข็ง, 12
โมเมนต์กระทำตามแนวแกนหลัก, 67
โมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่, 68
โมเมนต์ดัด, 52
โมเมนต์ทุติยภูมิ, 177

ร

ระนาบสะเทิน, 55
แรงกระทำตามแนวแกน, 186
แรงเฉือนตามแนวขวาง, 26
แรงดัด, 52
แรงดัดสมมาตร, 52

ว

วัสดุเหนียว, 243
วัสดุเปราะ, 243

ส

สูตรสำหรับแรงดัด, 59
สมการงานเสมือน, 218

ห

หน่วยแรงเฉือน, 184
หน่วยแรงตั้งฉากปกติ, 183
หน่วยแรงที่เกิดขึ้นตามแนวแกนหลายแกน, 185

ตำราเรียนวิชา

กลศาสตร์ของวัสดุ II
Mechanics of Materials II

ตำราเรียนวิชา กลศาสตร์ของวัสดุ II Mechanics of Materials II